Aufgabe 1

a) Wie groß ist das Oberflächenintegral über eine Würfel-/Kugeloberfläche, deren Schwerpunkt im Punkt $\vec{a}$ liegt, im Feld $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{r}$?

b) Sei $\vec{A}(\vec{r})$ ein Vektorfeld. Zeigen Sie, dass das Oberflächenintegral über jede geschlossene Flächen im Feld $\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$ verschwindet!

c) Sei $\phi(\vec{r})$ ein skalares Feld und $\vec{A}(\vec{r})$ ein Vektorfeld. Zeigen Sie

$$\int\limits_V \phi\, \mathrm{div}\vec{A}\ \mathrm{d}V \ = \ \oint\limits_{\partial V} \phi\vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{f} \ - \int\limits_V \vec{A}\, \mathrm{grad}\phi\ \mathrm{d}V$$

d) Sei $\phi(\vec{r})$ ein skalares Feld und $\vec{A}(\vec{r})$ ein Vektorfeld. Zeigen Sie

$$\int\limits_V \vec{A} \times \mathrm{grad}\phi\ \mathrm{d}V \ = \ \oint\limits_{\partial V} \phi\vec{A} \times \mathrm{d}\vec{f} + \int\limits_V \phi\, \mathrm{rot}\vec{A}\ \mathrm{d}V$$

e) Seien $A(\vec{r}), B(\vec{r})$ Vektorfelder. Zeigen Sie

$$\int\limits_V \vec{B} \cdot \mathrm{rot}\vec{A}\ \mathrm{d}V \ = \ \oint\limits_{\partial V} \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{f} \ + \int\limits_V \vec{A} \cdot \mathrm{rot}\vec{B}\ \mathrm{d}V$$

f) Sei $\vec{B}$ ein konstanter Vektor und $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$ ein Vektorfeld.
Berechnen Sie das Linienintegral entlang eines Kreises C mit Radius R, auf dem $\vec{B}$ senkrecht steht!

Aufgabe 2

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r}) = (4z, 1, 2x)$, sowie die Fläche F, die als der im ersten Oktanden gelegene Teil der Ebene $2x + 2y + z = 6$ definiert ist. Wie lautet das Flächenintegral von $\vec{A}(\vec{r})$ über F? Berechnen Sie das Ergebnis auf 2 Arten:

a) Flächenintegral $\int\limits_F \vec{A}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{f}$

b) Finden Sie ein $\vec{K}(\vec{r})$ mit $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{K}(\vec{r})$ und berechnen Sie $\oint\limits_{\partial F} \vec{K}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$

Aufgabe 3

Sei V das endliche Volumen, das von der Fläche $z = -(x^2 + y^2) + 1$ der x, y-Ebene begrenzt wird. Sei $\vec{A}(\vec{r}) = (xz, yz, \frac{xz}{y})$ ein Vektorfeld.
Benutzen Sie den Satz von Gauß um $\int\limits_{\partial V} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{f}$ zu berechnen!
∂V ist dabei der Rand von V.

Lösung zu Aufgabe 1

zu a) $\oint\limits_{\partial V} \vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{f} \;=\; \int\limits_V (\mathrm{div}\,\vec{r})\ \mathrm{d}V \;=\; \int\limits_V 3\ \mathrm{d}V \;=\; 3V$
Die Form des Gebietes geht gar nicht mit ein.

zu b) $\oint\limits_{\partial V} \mathrm{rot}\vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{f} \;=\; \int\limits_V \mathrm{div\ rot}\ \vec{A}\ \mathrm{d}V \;=\; \int\limits_V 0\ \mathrm{d}V \;=\; 0$

zu c) $\int\limits_V \phi\,\mathrm{div}\vec{A}\ \mathrm{d}V \;=\; \int\limits_V \mathrm{div}(\phi\vec{A})\ \mathrm{d}V \;-\int\limits_V \vec{A}\,\mathrm{grad}\phi\ \mathrm{d}V \;=\; \oint\limits_{\partial V} \phi\vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{f} \;-\int\limits_V \vec{A}\,\mathrm{grad}\phi\ \mathrm{d}V$

zu d) $\int\limits_V \vec{A} \times \mathrm{grad}\phi\,\mathrm{d}V \;=\; \int\limits_V -\left((\vec{\nabla}\phi) \times \vec{A}\right)\ \mathrm{d}V \;=\; \int\limits_V \left(-\vec{\nabla} \times (\phi\vec{A}) + \phi\,\vec{\nabla}\vec{A}\right)\ \mathrm{d}V \;=\; \oint\limits_{\partial V} \phi\vec{A} \times \mathrm{d}\vec{f} + \int\limits_V \phi\,\mathrm{rot}\vec{A}\ \mathrm{d}V$

zu e) Es gilt
$\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} \;=\; (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} \;=\; \vec{\nabla}^A \cdot \vec{A} \times \vec{B} \;=\; \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \;-\vec{\nabla}^B \cdot \vec{A} \times \vec{B}$
$=\; \mathrm{div}(\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{A}$
Ersetzt man den Ausdruck im Integral auf der linken Seite und benutzt die dritte Variante des Gaußschen Satzes, ergibt sich die Behauptung.

zu f) $\oint\limits_{\partial C} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \;=\; \int\limits_C \mathrm{rot}\vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{f} \;=\; \vec{B} \cdot \int\limits_C \mathrm{d}\vec{f} \;=\; |B|\pi R^2$
Die Form geht nicht ein, nur die Fläche.

Lösung zu Aufgabe 2

zu a)

Parametrisierung:
$\vec{r} := (x, y, 6 - 2x - 2y), \quad \vec{n} = \vec{\nabla}(2x + 2y + z) = (2, 2, 1)$

$$\int\limits_F \vec{A}(\vec{r})\cdot \mathrm{d}\vec{f} \;=\; \int\limits_{x=0}^{3}\int\limits_{y=0}^{3-x} \begin{pmatrix} 4(6\text{-}2\text{x}\text{-}2\text{y}) \\ 1 \\ 2\text{x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \;=\; \int\limits_0^3 [50(3-x)-14x(3-x)-8(3-x)^2]\mathrm{d}x$$

$$= 90$$

zu b)

Ein mögliches $\vec{K}$ ist $\vec{K}(\vec{r}) = (2z - 2xy, 0, x + 4yz)$. Die Fläche F ist ein Dreieck mit den Kanten C_1, C_2, C_3. Diese lassen sich parametrisieren:

$C_1: \quad \vec{r}(t) = (t, 3-t, 0),\ \dot{\vec{r}} = (1, -1, 0),\ t \in [0; 3]$

$$\int\limits_{C_1} \vec{K}\cdot \mathrm{d}\vec{r} \;=\; \int\limits_3^0 \vec{K}\cdot\dot{\vec{r}}\,\mathrm{d}t \;=\; \int\limits_3^0 (-2)t(3-t)\ \mathrm{d}t \;=\; 9$$

$C_2: \quad \vec{r}(t) = (0, t, 6-2t),\ \dot{\vec{r}} = (0, 1, -2),\ t \in [0; 3]$

$$\int\limits_{C_2} \vec{K}\cdot \mathrm{d}\vec{r} \;=\; \int\limits_3^0 (-2)4t(6-2t)\ \mathrm{d}t \;=\; 72$$

$C_3: \quad \vec{r}(t) = (t, 0, 6-2t),\ \dot{\vec{r}} = (1, 0, -2),\ t \in [0; 3]$

$$\int\limits_{C_3} \vec{K}\cdot \mathrm{d}\vec{r} \;=\; \int\limits_0^3 (2z-2x)\ \mathrm{d}t \;=\; \int\limits_0^3 [(2(6-2t)-2t]\ \mathrm{d}t \;=\; 12t-3t^2\Big|_{t=0}^{3} \;=\; 9$$

$$\int\limits_F \vec{A}(\vec{r})\cdot \mathrm{d}\vec{f} \;=\; \int\limits_F (\vec{\nabla}\times\vec{K})\cdot \mathrm{d}\vec{f} \;=\; \int\limits_{\partial F} \vec{K}(\vec{r})\cdot \mathrm{d}\vec{r} \;=\; \int\limits_{C_1} \vec{K}\cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int\limits_{C_2} \vec{K}\cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int\limits_{C_3} \vec{K}\cdot \mathrm{d}\vec{r} \;=$$

$$= 9 + 72 + 9 \;=\; 90$$

Lösung zu Aufgabe 3

$$\int_{\partial V} \vec{A}(\vec{r})\cdot \mathrm{d}\vec{f} \;=\; \int_V \mathrm{div}\vec{A}\ \mathrm{d}V \overset{\text{S.v.G.}}{=} \int_V \left(2z + \frac{x}{y}\right)\ \mathrm{d}V$$

Eine mögliche Parametrisierung ist $\vec{r} = (-a\sin\phi, a\cos\phi, z)$

$$\int_V \left(2z + \frac{x}{y}\right)\ \mathrm{d}V \;=\; \int_{a=0}^{1}\int_{z=0}^{1-a^2}\int_{\phi=0}^{2\pi} \left(2z(a,\phi,z) + \frac{x(a,\phi,z)}{y(a,\phi,z)}\right)\ a\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$$

$$= \int\limits_{a=0}^{1} \int\limits_{z=0}^{1-a^2} \int\limits_{\phi=0}^{2\pi} (2z - \tan\phi)\, a \;\mathrm{d}a\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z \;=\; \int\limits_{a=0}^{1} \int\limits_{z=0}^{1-a^2} \left[2za\,\phi + \ln(\cos\phi)\right]_0^{2\pi} \;\mathrm{d}a\,\mathrm{d}z \;=$$

$$= \int\limits_{a=0}^{1} \int\limits_{z=0}^{1-a^2} \left[2za\,\phi + \ln(\cos\phi)\right]_0^{2\pi} \;\mathrm{d}a\,\mathrm{d}z \;=\; \int\limits_{a=0}^{1} 2\pi\,(1-a^2)^2 a \;\mathrm{d}a \;=$$

$$= \int\limits_{a=0}^{1} 2\pi\,(a - 2a^3 + a^5)\;\mathrm{d}a \;=\; 2\pi(\tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{2}a^4 + \tfrac{1}{6}a^6)\Big|_0^1 \;=\; \tfrac{\pi}{3}$$