Aufgabe 1

a) Wie groß ist das Oberflächenintegral über eine Würfel-/Kugeloberfläche, deren Schwerpunkt im Punkt $\vec{a}$ liegt, im Feld $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{r}$?

b) Sei $\vec{A}(\vec{r})$ ein Vektorfeld. Zeigen Sie, dass das Oberflächenintegral über jede geschlossene Flächen im Feld $\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$ verschwindet!

c) Sei $\phi(\vec{r})$ ein skalares Feld und $\vec{A}(\vec{r})$ ein Vektorfeld. Zeigen Sie

$$\int\limits_V \phi\, \mathrm{div}\vec{A}\; \mathrm{d}V \;=\; \oint\limits_{\partial V} \phi\vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{f} \;-\; \int\limits_V \vec{A}\, \mathrm{grad}\phi\; \mathrm{d}V$$

d) Sei $\phi(\vec{r})$ ein skalares Feld und $\vec{A}(\vec{r})$ ein Vektorfeld. Zeigen Sie

$$\int\limits_V \vec{A} \times \mathrm{grad}\phi\; \mathrm{d}V \;=\; \oint\limits_{\partial V} \phi\vec{A}\times \mathrm{d}\vec{f} + \int\limits_V \phi\, \mathrm{rot}\vec{A}\; \mathrm{d}V$$

e) Seien $A(\vec{r}), B(\vec{r})$ Vektorfelder. Zeigen Sie

$$\int\limits_V \vec{B}\cdot \mathrm{rot}\vec{A}\; \mathrm{d}V \;=\; \oint\limits_{\partial V} \left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{f} \;+ \int\limits_V \vec{A}\cdot \mathrm{rot}\vec{B}\; \mathrm{d}V$$

f) Sei $\vec{B}$ ein konstanter Vektor und $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r}$ ein Vektorfeld.
Berechnen Sie das Integral entlang eines Kreises C mit Radius R, auf dem $\vec{B}$ senkrecht steht!

Aufgabe 2

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$, sowie die Fläche F, die als der im ersten Oktanden gelegene Teil der Ebene $2x + 2y + z = 6$ definiert ist. Wie lautet das Flächenintegral von $\vec{A}(\vec{r})$ über F? Berechnen Sie das Ergebnis auf 2 Arten:

a) Flächenintegral $\int\limits_F \vec{A}(\vec{r})\cdot \mathrm{d}\vec{f}$

b) Finden Sie ein $\vec{K}(\vec{r})$ mit $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{K}(\vec{r})$ und berechnen Sie $\oint\limits_{\partial F} \vec{K}(\vec{r})\cdot \mathrm{d}\vec{r}$

Aufgabe 3

Sei V das endliche Volumen, das von der Fläche $z = -(x^2 + y^2) + 1$ der x, y-Ebene begrenzt wird. Sei $\vec{A}(\vec{r}) = (xz, yz, \frac{xz}{y})$ ein Vektorfeld.
Benutzen Sie den Satz von Gauß um $\int\limits_{\partial V} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{f}$ zu berechnen!
∂V ist dabei der Rand von V.