## Aufgabe 1: Transformationssatz

**a)** Zeigen Sie: Aus

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} a\sin\theta\cos\phi \\ a\sin\theta\sin\phi \\ a\cos\theta \end{pmatrix}$$

folgt (Kugelkoordinaten)

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad = \int_{a=0}^{\infty}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} f(\vec{r}(a,\phi,\theta))\ \ r^2\sin\theta\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta$$

**b)** Zeigen Sie: Aus

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} a\cos\phi \\ a\sin\phi \\ b \end{pmatrix}$$

folgt (Zylinderkoordinaten)

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad = \int_{a=0}^{\infty}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{b=-\infty}^{\infty} f(\vec{r}(a,\phi,b))\ \ a\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}b$$

**c)** Wie lautet die entsprechende Transformationsregel für parabolische Zylinderkoordinaten?

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a^2-b^2) \\ ab \\ c \end{pmatrix}$$

**d)** Wie lautet die entsprechende Transformationsregel für allgemeinere Kugelkoordinaten um einen Punkt $\vec{p}$?

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} a\sin\theta\cos\phi\ +\ p_x \\ a\sin\theta\sin\phi\ +\ p_y \\ a\cos\theta\ +\ p_z \end{pmatrix}$$

## Aufgabe 2: Masse

Für die Masse $M$ eines Körpers mit Volumen $V$ und Dichteverteilung $\rho(\vec{r})$ gilt:

$$M = \int_V \rho(\vec{r})\ \mathrm{d}^3r$$

Berechnen Sie die Masse

**a)** eines Würfels mit Kantenlänge 1 im ersten Oktanden. Eine Ecke des Würfels liegt im Ursprung. $\rho(\vec{r}) = xyz$

**b)** eines Würfels mit Kantenlänge 1 im ersten Oktanden. Eine Ecke des Würfels liegt im Ursprung. $\rho(\vec{r}) = x + y + z$

**c)** eines Zylindes mit Radius $R$ und Höhe $h$ der auf der xy-Ebene steht und dessen Rotationsachse in der z-Achse liegt. $\rho(\vec{r}) = (x^2 + y^2)z$

**d)** eines Zylindes mit Radius $R$ und Höhe $h$ der auf der xy-Ebene steht und dessen Rotationsachse in der z-Achse liegt. $\rho(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{R^2-y^2}}$

**e)** einer Kugel mit Radius $R$, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt, mit $\rho(\vec{r}) = \exp(\lambda r),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

## Aufgabe 3: Dipolmoment

Für das Dipolmoment $\vec{p}$ einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ gilt:

$$\vec{p} = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{r}\rho(\vec{r})\ \mathrm{d}^3r$$

Berechnen Sie das Dipolmoment

**a)** einer Kugel mit Radius $R$, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt, mit $\rho(\vec{r}) = \rho_0 = \text{konst}$

**b)** einer Kugel mit Radius $R$, deren Mittelpunkt im Punkt $(a, 0, 0)$ liegt, mit $\rho(\vec{r}) = \rho_0 = \text{konst}$

## Aufgabe 4: Rotationsellipsoid

Berechnen Sie das endliche Volumen, das durch die folgende Fläche begrenzt wird

$$R = \left|\vec{r} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{b} \end{pmatrix}\right| + \left|\vec{r} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{b} \end{pmatrix}\right|$$

## Lösung zu Aufgabe 1

**zu a)** Siehe Trandsformationssatz

$$\det\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial(a,\phi,\theta)}\right) = \det\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & a\cos\theta\cos\phi & -a\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & a\cos\theta\sin\phi & a\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -a\sin\theta & 0 \end{pmatrix} = a^2\sin\theta$$

**zu b)** Siehe Trandsformationssatz

$$\det\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial(a,\phi,\theta)}\right) = \det\begin{pmatrix} \cos\phi & -a\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & a\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = a$$

**zu c)** Siehe Trandsformationssatz

$$\det\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial(a,b,c)}\right) = \det\begin{pmatrix} \text{a} & \text{-b} & 0 \\ \text{b} & \text{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = a^2+b^2$$

**zu d)** Die Funktionaldeterminante ist die gleiche wie bei a) Also gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int\limits_{a=0}^{\infty}\int\limits_{\phi=0}^{2\pi}\int\limits_{\theta=0}^{\pi} f\left(\begin{pmatrix} a\sin\theta\cos\phi + p_x \\ a\sin\theta\sin\phi + p_y \\ a\cos\theta + p_z \end{pmatrix}\right) r^2\sin\theta\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta$$

## Lösung zu Aufgabe 2

**zu a)** $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \left(\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

**zu b)** $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 x+y+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 3\int_0^1\int_0^1\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{3}{2}$

**zu c)** $\int_V (x^2+y^2)z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int\limits_{a=0}^{R}\int\limits_{\phi=0}^{2\pi}\int\limits_{z=0}^{h} za^2\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z = \frac{hR^3}{3}$

**zu d)** $\int_V \frac{1}{\sqrt{R^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int\limits_{z=0}^{h}\int\limits_{y=-R}^{R}\int\limits_{x=-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \frac{1}{\sqrt{R^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

$= \int\limits_{z=0}^{h}\int\limits_{y=-R}^{R} \frac{1}{\sqrt{R^2-y^2}}\,2\sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int\limits_{z=0}^{h}\int\limits_{y=-R}^{R} 2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 4Rh$

**zu e)** $\int\limits_{r=0}^{R}\int\limits_{\phi=0}^{2\pi}\int\limits_{\theta=0}^{\pi} \exp(\lambda r)\, r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta \;=\; 4\pi \int\limits_{r=0}^{R} r^2 \exp(\lambda r)\,\mathrm{d}r \;\overset{\text{Falls }\lambda\neq 0}{=}\; 4\pi \left[\left(\frac{r^2}{\lambda} - \frac{2r}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3}\right)e^{\lambda r}\right]_0^R$

## Lösung zu Aufgabe 3

**zu a)** $\int\limits_V \vec{r}\rho_0\; r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta \;=\; \rho_0 \int\limits_V \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta \;=\; \ldots \;=\; 0$

**zu b)** $\int\limits_V (\vec{r}+\vec{a})\rho_0\, r^2\, \sin\theta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta \;=\; \rho_0 \int\limits_V \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \;+\; a \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta \;=\; \rho_0 \left( \begin{matrix} \int\limits_V a\; r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d} \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right.$

## Lösung zu Aufgabe 4

In Zylinderkoordinaten hat die Flächengleichung die Form

$$R = \sqrt{a^2 + (z+b)^2} + \sqrt{a^2 + (z-b)}$$

Im Folgenden wird die Gleichung nach $a$ aufgelöst:

$$\begin{aligned} a^2 + (z-b)^2 \;&=\; R^2 - 2R\sqrt{a^2+(z+b)^2} + a^2 + (z+b)^2 \\ 4R^2(a^2+(z+b)^2) \;&=\; [R^2 + (z+b)^2 - (z-b)^2]^2 \\ a \;&=\; \sqrt{\frac{(R^2+4zb)^2}{4R^2} - (z+b)^2} \\ a \;&=\; \sqrt{\left(\frac{4b^2}{R^2}-1\right)z^2 \;+\; \frac{R^2}{4} - b^2} \qquad =:\; a(z) \end{aligned}$$

Das gesuchte Volumenintegral kann wie folgt berechnet werden:

$$\int\limits_V \mathrm{d}V \;=\; \int\limits_{z=-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} \int\limits_{a'=0}^{a(z)} \int\limits_{\phi=0}^{2\pi} a\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}a \;=\; \int\limits_{z=-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} \pi a(z)^2\;\mathrm{d}z \;=$$

$$=\;\pi \int\limits_{z=-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} \left[\left(\frac{4b^2}{R^2}-1\right)z^2 \;+\; \frac{R^2}{4} - b^2\right]\;\mathrm{d}z \;=\pi\left[\left(\frac{4b^2}{R^2}-1\right)\frac{z^3}{3} + \left(\frac{R^2}{4}-b^2\right)z\;\right]_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} \;=$$

$$=\pi\left[\left(\frac{4b^2}{R^2}-1\right)\frac{R^3}{12} + \left(\frac{R^2}{4}-b^2\right)R\right] \;=\frac{\pi}{6}R^3 - \frac{2\pi b^2}{3}R$$