Aufgabe 1: Transformationssatz

a) Zeigen Sie: Aus

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} a\sin\theta\cos\phi \\ a\sin\theta\sin\phi \\ a\cos\theta \end{pmatrix}$$

folgt (Kugelkoordinaten)

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad = \int_{a=0}^{\infty}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} f(\vec{r}(a,\phi,\theta))\ \ r^2\sin\theta\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta$$

b) Zeigen Sie: Aus

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} a\cos\phi \\ a\sin\phi \\ b \end{pmatrix}$$

folgt (Zylinderkoordinaten)

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad = \int_{a=0}^{\infty}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{b=-\infty}^{\infty} f(\vec{r}(a,\phi,b))\ \ a\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}b$$

c) Wie lautet die entsprechende Transformationsregel für parabolische Zylinderkoordinaten?

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a^2-b^2) \\ ab \\ c \end{pmatrix}$$

d) Wie lautet die entsprechende Transformationsregel für allgemeinere Kugelkoordinaten um einen Punkt $\vec{p}$?

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} a\sin\theta\cos\phi\ +\ p_x \\ a\sin\theta\sin\phi\ +\ p_y \\ a\cos\theta\ +\ p_z \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Masse

Für die Masse M eines Körpers mit Volumen V und Dichteverteilung $\rho(\vec{r})$ gilt:

$$M = \int_V \rho(\vec{r})\ \mathrm{d}^3 r$$

Berechnen Sie die Masse

a) eines Würfels mit Kantenlänge 1 im ersten Oktanden. Eine Ecke des Würfels liegt im Ursprung. $\rho(\vec{r}) = xyz$

b) eines Würfels mit Kantenlänge 1 im ersten Oktanden. Eine Ecke des Würfels liegt im Ursprung. $\rho(\vec{r}) = x + y + z$

c) eines Zylindes mit Radius R und Höhe h der auf der xy-Ebene steht und dessen Rotationsachse in der z-Achse liegt. $\rho(\vec{r}) = (x^2 + y^2)z$

d) eines Zylindes mit Radius R und Höhe h der auf der xy-Ebene steht und dessen Rotationsachse in der z-Achse liegt. $\rho(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{R^2 - y^2}}$

e) einer Kugel mit Radius R, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt, mit $\rho(\vec{r}) = \exp(\lambda r),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3: Dipolmoment

Für das Dipolmoment $\vec{p}$ einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ gilt:

$$\vec{p} = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{r}\rho(\vec{r})\ \mathrm{d}^3 r$$

Berechnen Sie das Dipolmoment

a) einer Kugel mit Radius R, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt, mit $\rho(\vec{r}) = \rho_0 = \text{konst}$

b) einer Kugel mit Radius R, deren Mittelpunkt im Punkt $(a, 0, 0)$ liegt, mit $\rho(\vec{r}) = \rho_0 = \text{konst}$

Aufgabe 4: Rotationsellipsoid

Berechnen Sie das endliche Volumen, das durch die folgende Fläche begrenzt wird

$$R = \left| \vec{r} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{b} \end{pmatrix} \right| + \left| \vec{r} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{b} \end{pmatrix} \right|$$