Musterlösung Analysis 3 - Funktionentheorie

13. März 2012

Aufgabe 1: Zum Aufwärmen

(i) Betrachte die Laurantzerlegung von $f : \mathbb{C}^\bullet \to \mathbb{C}, f(z) = \frac{\sin z}{z}$ und zeige mit Hilfe der Zerlegung, dass die Singularität bei $z = 0$ hebbar ist.

Lösung:

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots$$

und man sieht, dass alle a_n für $n < 0$ verschwinden, und daher ist die Singularität hebbar.

(ii) Betrachte die Laurantzerlegung von $f : \mathbb{C}^\bullet \to \mathbb{C}, f(z) = \exp(-\frac{1}{z^2})$ und zeige mit Hilfe der Zerlegung, dass die Singularität bei $z = 0$ wesentlich ist.

Lösung:

$$f(z) = 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^4} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z^6} + \dots = 1 + h(1/z)$$

und man sieht, dass der Hauptteil $h$nicht abbricht. Daher ist die Singularität wesentlich.

(iii) Man bestimme die Vielfachheit der Pole dieser drei Funktionen

(a) $\frac{\cos z}{z^2}$

(b) $\frac{z^7+1}{z^7}$

(c) $\frac{\exp(z)-1}{z^4}$

Lösung:

(a) 2

(b) 7

(c) 3

(iii) Bestimme die Residuen in allen Singualritäten für die folgenden Funktionen

(a) $\frac{1-\cos z}{z^2}$

(b) $\frac{z^3}{(1+z)^3}$

(c) $\frac{\exp(z)}{(z-1)^2}$

(d) $z\exp(\frac{1}{1-zs})$

(e) $\frac{1}{(z^2+1)(z-i)^3}$

(f) $\frac{1}{\sin(\pi z)}$

Lösung:

(a) $\mathrm{Res}(f, 0) = \lim\limits_{z\to 0} \frac{d}{dz}(1 - cos(z)) = \sin(0) = 0$

(b) $\operatorname{Res}(f,-1) = \lim\limits_{z\to -1} \frac{1}{2}\frac{d^2}{d^2} z^3 = -3$

(c) $\operatorname{Res}(f,0) = \lim\limits_{z\to 1} \frac{d^2}{dz^2} \exp(z) = e$

(d) $\operatorname{Res}(f,i) = \lim\limits_{z\to i} \frac{1}{3!}\frac{1}{z+i} = -\frac{1}{16}$ $\operatorname{Res}(f,-u) = \frac{1}{16}$

(e) $\operatorname{Res}(f,n) = \lim\limits_{z\to n} \frac{1}{\pi\cos(\pi z)} = \frac{(-1)^n}{\pi}$

Aufgabe 2: Laurentreihe

(i) Entwickle $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$ in $\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-i| < 2\}$ in eine Laurentreihe. Welcher Typ von Singularität liegt in $z = i$ vor?

Lösung: Die Partialbruchzerlegung lautet

$$\frac{z}{z^2+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{z+i} + \frac{1}{2}\frac{1}{z-i}$$

Da wir um den Punkt $z = i$ entwickeln, ist der zweite Term schon in der Richtigen Form. Wenden wir uns nun dem ersten zu. Setzten wir $\zeta = z - i$, dann gilt $0 < |\zeta| < 2$ und man erhält für den ersten Term mit Hilfe der geometrischen Reihe:

$$\frac{1}{2}\frac{1}{z+i} = \frac{1}{4i}\frac{1}{\frac{\zeta}{2i}+1} = \frac{1}{4i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(2i)^n}$$

und damit

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z-i} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(2i)^{n+1}}$$

Die Singularität bei $z = i$ ist ein Pol erster Ordnung.

(ii) Entwickle die Funktion $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ auf den Ringgebieten

$$\mathcal{R}(a;r,R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}$$

mit $(a;r,R) \in \{(0;0,1),(0;1,2),(0;2,\infty)\}$

Lösung: Die Partialbruchzerlegung lautet

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z}$$

dann erhält man

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-2^{-n-1})z^n & ,0<|z|<1 \\ -\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^{-n} - \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} & ,1<|z|<2 \\ \sum\limits_{n=2}^{\infty}(2^{n-1}-1)z^{-n} & ,2<|z|<\infty \end{cases}$$

(iii) Zeige, dass das Residuum einer holomorphen Funktion f in einer Singularität $a \in \mathbb{C}$ die eindeutig bestimmte komplexe Zahl c ist, so dass die Funktion

$$f(z) - \frac{c}{z-a}$$

eine in einer geigneten punktierten Umgebung von a eine Stammfunktion hat.

Lösung: Laurentreihen ohne den Term a_{-1} können gliedweise integriert werden.

Aufgabe 3: Residuensatz

(i) Berechne die folgenden Integrale

(a) $\int\limits_0^\infty \frac{x^2}{x^6+1}\mathrm{dx}$

Lösung: Zunächst gilt:

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^2}{x^6+1}\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{x^6+1}\mathrm{dx}$$

Die Lösung der Gleichung $z^6 = -1$ ergibt die Lösungen

$$z_n = \exp\frac{(2n+1)\pi i}{6}$$

mit $1 \leq n \leq 6$. Für uns kommen nur die Werte in der oberen Halbebene in Betracht, also $n = 1, 2, 3$. Damit ergibt sich

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^2}{x^6+1}\mathrm{dx} = \frac{\pi i}{6}[e^{-i\pi/2} + e^{-i3\pi/2} + e^{-i\pi 5/2}] = \frac{\pi}{6}$$

(b) $\int\limits_0^\infty \frac{x}{x^4+1}\mathrm{dx}$

Lösung: Wir benutzten folgende Parametrisierung

$$\gamma_1(t) = x, x \in [0, r]$$
$$\gamma_2(t) = ix, x \in [0, r]$$
$$\gamma_3(t) = re^{ix}, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

hierbei ist zu beachten, dass γ_2 hier entgegen dem Uhrzeigersinn parametrisiert wurde. Für γ_3 ergibt sich

$$\left|\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ir^2 e^{2ix}}{r^4 e^{4ix}+1}\right| \leq l(\gamma_3) \max_{x\in[0,\pi/2]} \frac{r^2}{\sqrt{r^8 + 2\cos(4x)r^4 + 1}} \xrightarrow{r\to\infty} 0$$

Dann folgt mit dem Residuensatz

$$2\int\limits_0^\infty \frac{x}{x^4+1}\mathrm{dx} = 2\pi i \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{4(\frac{1}{\sqrt{2}})^3} = \frac{\pi}{2}$$

Also

$$\int\limits_0^\infty \frac{x}{x^4+1}\mathrm{dx} = \frac{\pi}{4}$$

(c) $\int\limits_0^\infty \frac{1}{x^4+x^2+1}\mathrm{dx}$

Lösung: Es gilt

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{x^4+x^2+1}\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^4+x^2+1}\mathrm{dx}$$

und es werden die einfachen Pole $z_\pm = \frac{1}{2}(\pm 1 + i\sqrt{3})$ betrachtet. Dann ergibt der Residuensatz

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{x^4+x^2+1}\mathrm{dx} = \pi i \left[\frac{1}{(1+i\sqrt{3})i\sqrt{3}} - \frac{1}{(-1+i\sqrt{3})i\sqrt{3}}\right] = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

(ii) Zeige das gilt:

(a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{dx} = \frac{\pi}{2a}\ ,\ a > 0$

Lösung: Der zu betrachtende Pol ist $z_+ = ia$ und damit Berechnet sich das Residuum zu

$$\mathrm{Res}(\frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}; ia) = \lim_{z\to ia} \frac{d}{dz}\frac{z^2}{(z+ia)^2} = \frac{1}{4ia}$$

und damit ergibt sich sofort die Behauptung.

(b) $\int\limits_0^\infty \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{dx} = \frac{\pi}{2ab(a+b)}\ ,\ a,b > 0$

Lösung: Es gilt

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{dx}$$

Die benötigen Nullstellen sind $z_1 = ia, z_2 = ib$ und damit ergeben die Residuen

$$\mathrm{Res}(\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}; ia) = \frac{1}{2ia(b^2-a^2)}$$
$$\mathrm{Res}(\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}; ib) = \frac{1}{2ib(a^2-b^2)}$$

und damit

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{dx} = \frac{\pi}{2ab}\left[\frac{b}{b^2-a^2} - \frac{a}{b^2-a^2}\right] = \frac{\pi}{2ab(a+b)}$$

(c) $\int\limits_0^\infty \frac{x\sin x}{x^2+1}\mathrm{dx} = \frac{\pi}{2e}$

Lösung: Es gilt:

$$\int\limits_0^\infty \frac{x\sin x}{x^2+1}\mathrm{dx} = \frac{\pi}{2e} = \frac{1}{2}\int\limits_{\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+1}\mathrm{dx} = \frac{\pi}{2e}$$

Betrachten wir nun die Funktion $f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2+1}$ und die Parametrisierung

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= t & ,t \in [-r, r]\\
\gamma_2(t) &= r + irt & ,t \in [0, 1]\\
\gamma_3(t) &= rt + ir & ,t \in [-1, 1]\\
\gamma_4(t) &= -r + ir(1-t) & ,t \in [0, 1]
\end{aligned}$$

Dann erhält man, dass für den Grenzwert $r \to \infty$ die Integrale über $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ verschwinden. Die Abschätzungen hierfür heißen:

$$\left|\int\limits_{\gamma_2} \frac{ze^{iz}}{z^2+1}\mathrm{dz}\right| \le \max_{t\in[0,1]} r\frac{(1+t^2)e^{-rt}}{(r^2+t^2+1)} = \frac{r}{1+r^2} \xrightarrow{r\to\infty} 0$$

$$\left|\int\limits_{\gamma_3} \frac{ze^{iz}}{z^2+1}\mathrm{dz}\right| \le \max_{t\in[-1,1]} \frac{((tr)^2+r^2)^{1/2}e^{-r}}{(rt)^2+r^2+1} \xrightarrow{r\to\infty} 0$$

Die Behandlung von γ_4 läuft analog zu γ_2. Daher können wir nun ohne Bedenken den Residuensatz anwenden. Die in Frage kommende Polstelle ist $z_+ = i$ und es ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+1}\mathrm{dx} = 2\pi i \frac{ie^{-1}}{2i} = \frac{i\pi}{e}$$

Vergleich der Imaginärteile auf linker und rechter Seite ergibt die Behauptung.

(iii) Berechne das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\cos t}\ ,\ a > 0$$

Hinweis: Betrachte die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{a+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})}$.

Lösung: Wir nehmen die Parametrisierung $\gamma(t) = e^{it}\ ,\ t \in [0, 2\pi]$. Die einzige relevante Polstelle ist dann $z_0 = \sqrt{a^2-1} - a$ und es ergibt sich

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\cos t} = 2\pi \frac{2}{2z_0+a} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

(iv) Zeige, dass gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^(n+1)} = \frac{\pi}{(n!)^2}\frac{(2n)!}{2^{2n}}$$

Lösung: Wir schließen in der oberen Halbebene, daher ist nur $z = i$ als Polstelle interessant. und es ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^(n+1)} = 2\pi i \frac{1}{n!}\lim_{z\to i}\frac{d^n}{dz^n}\frac{1}{(z+i)^{n+1}} = 2\pi i \frac{1}{n!}(n+1)\cdots(2n)(-1)^n\frac{1}{(2i)^{2n+1}} = \frac{\pi}{(n!)^2}\frac{(2n)!}{2^{2n}}$$