Musterlösung Analysis 3 - Funktionentheorie

13. März 2012

Aufgabe 1: Zum Aufwärmen

(i) Betrachte die Laurantzerlegung von $f : \mathbb{C}^\bullet \to \mathbb{C}, f(z) = \frac{\sin z}{z}$ und zeige mit Hilfe der Zerlegung, dass die Singularität bei $z = 0$ hebbar ist.

(ii) Betrachte die Laurantzerlegung von $f : \mathbb{C}^\bullet \to \mathbb{C}, f(z) = \exp(-\frac{1}{z^2})$ und zeige mit Hilfe der Zerlegung, dass die Singularität bei $z = 0$ wesentlich ist.

(iii) Man bestimme die Vielfachheit der Pole dieser drei Funktionen

(a) $\frac{\cos z}{z^2}$

(b) $\frac{z^7+1}{z^7}$

(c) $\frac{\exp(z)-1}{z^4}$

(iii) Bestimme die Residuen in allen Singualritäten für die folgenden Funktionen

(a) $\frac{1-\cos z}{z^2}$

(b) $\frac{z^3}{(1+z)^3}$

(c) $\frac{\exp(z)}{(z-1)^2}$

(d) $z \exp(\frac{1}{1-zs})$

(e) $\frac{1}{(z^2+1)(z-i)^3}$

(f) $\frac{1}{\sin(\pi z)}$

Aufgabe 2: Laurentreihe

(i) Entwickle $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$ in $\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - i| < 2\}$ in eine Laurentreihe. Welcher Typ von Singularität liegt in $z = i$ vor?

(ii) Entwickle die Funktion $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ auf den Ringgebieten

$$\mathcal{R}(a; r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}$$

mit $(a; r, R) \in \{(0; 0, 1), (0; 1, 2), (0; 2, \infty)\}$

(iii) Zeige, dass das Residuum einer holomorphen Funktion f in einer Singularität $a \in \mathbb{C}$ die eindeutig bestimmte komplexe Zahl c ist, so dass die Funktion

$$f(z) - \frac{c}{z - a}$$

eine in einer geigneten punktierten Umgebung von a eine Stammfunktion hat.

Lösung: Laurentreihen ohne den Term a_{-1} können gliedweise integriert werden.

Aufgabe 3: Residuensatz

(i) Berechne die folgenden Integrale

(a) $\int\limits_0^\infty \frac{x^2}{x^6+1} \mathrm{dx}$

(b) $\int\limits_0^\infty \frac{x}{x^4+1} \mathrm{dx}$

(c) $\int\limits_0^\infty \frac{1}{x^4+x^2+1} \mathrm{dx}$

(ii) Zeige das gilt:

(a) $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2} \mathrm{dx} = \frac{\pi}{2a} \ , \ a > 0$

(b) $\int\limits_0^\infty \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} \mathrm{dx} = \frac{\pi}{2ab(a+b)} \ , \ a, b > 0$

(c) $\int\limits_0^\infty \frac{x \sin x}{x^2+1} \mathrm{dx} = \frac{\pi}{2e}$

(iii) Berechne das Integral

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos t} \ , \ a > 0$$

Hinweis: Betrachte die Funktion $f(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{a+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})}$.

(iv) Zeige, dass gilt

$$\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{(}n+1)} = \frac{\pi}{(n!)^2} \frac{(2n)!}{2^{2n}}$$