Musterlösung Analysis 3 - Flächenintegrale und Funktionentheorie 1

12. März 2012

Aufgabe 1: Zum Aufwärmen

(i) Berechne $\oint_\gamma z\mathrm{dz}$ mit $\gamma(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ durch explizites Ausrechnen des Kurvenintegrals. Gehts auch einfacher?

(ii) Berechne das Kurvenintegral $\oint_\gamma \bar{z}\mathrm{dz}$ mit $\gamma(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Ist die Funktion $f(z) = \bar{z}$ holomorph?

(iii) Berechne das Kurvenintegral $\oint_\gamma \frac{1}{z}\mathrm{dz}$ mit $\gamma(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Ist die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ holomorph?

(iv) Berechne das Kruvenintegral $\oint_\gamma (z - z_0)^n\mathrm{dz}$ mit einer gegneten Parametrisierung.

Aufgabe 2: Flächeninhalte

(i) Zeige das für die Parametrisierung

$$\Gamma : [a, b] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3;\ (z, \phi) \mapsto \begin{pmatrix} r(z)\cos(\phi) \\ r(z)\sin(\phi) \\ z \end{pmatrix}$$

die Formel

$$|\Gamma| = 2\pi \int\limits_a^b \sqrt{1 + (r'(z))^2}r(z)\mathrm{dz}$$

für den Flächeninhalt von Γ gilt.

(ii) Parametrisiere die Fläche

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2, z = 2 + x^2 + y^2\}$$

und berechne den Flächeninhalt.

Aufgabe 3: Holomorphie

(i) Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, dann nennt man h harmonisch, wenn $\Delta h = 0$ gilt. Zeige nun:

(a) Sei $u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, dann gilt $Re(u)$ und $Im(U)$ sind harmonisch.

(b) Sei h eine harmonische Funktion, dann ist h der Realteil einer in $\mathbb{C}$ holomorphen Funktion. Ist der Imaginärteil dieser Funktion eindeutig bestimmt?

(ii) Sei $f : U \to \mathbb{X}$ und U einfach zusammenhängend. Zeige, dass die folgenden Aussagen zueinander äquivalent sind.

(a) f besitzt eine Stammfunktion.

(b) f ist stetig und es gilt $\int_\gamma f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = 0$ für jede stückweise stetig differenzierbare geschlossene Kurve in U

(c) f ist stetig und $\int_\gamma f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ hängt nur von den Anfangs- und Endwerten von γ ab.

Zeige, dann das all diese Eigenschaften äquivalent dazu sind, dass f holomorph ist.

(iii) Zeige, ob die reellwertige Funktion $\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}, \varphi(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$ Realteil einer holomorphen Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 4: Kurvenintegrale und der Cauchysche Integralsatz

(i) Sei $0 < r < R$ und f die Funktion

$$\begin{aligned} f : U_R^*(0) &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{R+z}{(R-z)z} \end{aligned}$$

Man zeige $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{2}{R-z}$ und durch Integration über $\alpha : [0,2\pi] \to \mathbb{C},\ \alpha(t) = r\exp(it)$, dass

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos t + r^2}\mathrm{dt} = 1$$

gilt.

(ii) Berechne die Integtrale

$$\int_0^\infty \cos(t^2)\mathrm{dt} = \int_0^\infty \sin(t^2)\mathrm{dt} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

Hinweis: Benutze die Funktion $f(z) = \exp(iz^2)$ und vergleiche die positive reelle Achse mit der Winkelhalbierenden. Benutze $\int_0^\infty \exp(-t^2)\mathrm{dt}$.

(iii) Berechne die Folgenden Integrale mit Hilfe des Chauchyschen Integralsatzes und der Cauchyschen Integralformel und

$$\alpha_{a;r} : [0,2\pi] \to \mathbb{C},\ \alpha_{a,r} = a + re^{it}$$

mit $r > 0$.

(a)

$$\int_{\alpha_{2;1}} \frac{z^7}{z^2(z^4+1)}\mathrm{dz}$$

(b)

$$\int_{\alpha_{0;3}} \frac{\cos(\pi z)}{z^2-1}\mathrm{dz}$$

(c)

$$\int_{\alpha_{0;r}} \frac{\sin(z)}{z-b}\mathrm{dz}\ ,\ b \in \mathbb{C}\ ,\ |b| \neq r$$

(d)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha_{i;1}} \frac{e^z}{z^2+1}\mathrm{dz}$$

(e)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha_{1+2i;5}} \frac{4z}{z^2+9}\mathrm{dz}$$

(f)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha_{0;3}} \frac{e^z}{z^2+1}\mathrm{dz}$$

(g)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha_{1;1}} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n \mathrm{dz}\ ,\ n\in\mathbb{N}$$