Technische Universität München

Department of Physics

Ferienkurs zur Analysis 1 - Lösungen zu den Übungen

Taylor, Fourier, Matrixexponential und DGL

Freitag, 23.03.2012

Sascha Frölich

1 Taylorreihenentwicklung

Aufgabe 1
(i) Finden Sie die Taylorreihe von $f(x) = \arctan(x)$ um den Urpsrung...
Hinweis: $\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}\right)\Big|_{x=0} = \begin{cases} 0 & \textit{für } n \textit{ ungerade} \\ \pm(n+2)! & n \textit{ gerade, beginnend mit - bei } n=0\textit{, dann abwechselnd} \end{cases}$
(ii) Berechnen Sie die Taylorreihe von e^x und e^{2x} um den Ursprung.
(iii) Berechnen Sie die ersten drei Glieder der Taylorreihe von $f(x) = \sqrt{x}$ um den Punkt $x_0 = 36$.

Lösung 1
(i) Es gilt:

$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$\frac{d}{dx}\frac{1}{1+x^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$
$$\frac{d}{dx}\frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-2+6x^2}{(1+x^2)^3}$$

Mit Taylor und dem Hinweis kann nun die Potenzreihenentwicklung von $\frac{1}{1+x^2}$ um den Ursprung ermittelt werden:

$$\frac{1}{1+x^2}\bigg|_{x=0} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 ...$$

Daraus folgt die Taylorreihenentwicklung für den arctan:

$$\arctan(x) = \int dx\ 1 - x^2 + x^4 - x^6 ... = c + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ...$$

Und da $\arctan(0) = 0$ ist auch die Integrationskonstante $c = 0$.

(ii) Da für jede Ableitung n gilt: $(\frac{d}{dx})^n e^x\big|_{x=0} = 1$ folgt für die Taylorreihe:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

Für e^{2x}:

$$\frac{d}{dx} e^{2x} = 2e^{2x}$$
$$\frac{d^2}{dx^2} = 4e^{2x}$$
$$\Rightarrow \frac{d^n}{dx^n} e^{2x} = 2^n e^{2x}$$
$$\Rightarrow e^{2x} \overset{Taylor}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$$

(iii) $6 + \frac{x-36}{12} - \frac{(x-36)^2}{1728}$

2 Fourier

Aufgabe 2

(i) Sei g(x) 2π-periodisch mit $g(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$

Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten $\hat{g}(k)$ ohne $\hat{g}(0)$ der Funktion (sog. Rechtecksfunktion).

Hinweis: Nutzen Sie $e^{\pm ik\pi} = -1$ und $e^{\pm 2ik\pi} = 1$

(ii) Sei f(x) 2π-periodisch mit $f(x) = \frac{1}{4}(x - \pi)$ für $x \in [0, 2\pi]$. Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten $\hat{f}(k)$ ohne $\hat{f}(0)$ der Funktion.

Hinweis: Nutzen Sie $e^{-2ik\pi} = 1$

Lösung 2

(i) Wir berechnen:

$$\hat{g}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{-ikx} dx = \left[\frac{-e^{-ikx}}{2\pi ik} \right]_0^\pi = \frac{1}{2ik\pi} - \frac{e^{-ik\pi}}{2ik\pi}$$

Folglich sind die Fourierkoeffizienten:

$$\hat{g}(k) = \begin{cases} 0 & \text{n gerade} \\ \frac{1}{ik\pi} & \text{n ungerade} \end{cases}$$

(ii) Mit der Formel für die Fourierkoeffizienten folgt:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x - \pi)\ dx = \frac{1}{8\pi} \left(\overbrace{\int_0^{2\pi} xe^{-ikx} dx}^{=:I_1} - \pi \int_0^{2\pi} e^{-ikx} dx \right)$$

$$\overset{Part.Int.}{=} \frac{1}{8\pi} \left(\overbrace{\frac{xe^{-ikx}}{-ik} |_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikx}}{ik} dx}^{I_1} + \frac{\pi e^{-ikx}}{ik} |_0^{2\pi} \right) = \frac{1}{8\pi} \left[\frac{xe^{-ikx}}{-ik} + \frac{e^{-ikx}}{k^2} + \frac{\pi e^{-ikx}}{ik} \right]_0^{2\pi}$$

$$= \left[\frac{e^{-ikx}(1 + ik(x - \pi))}{8\pi k^2} \right]_0^{2\pi} \overset{e^{-i2\pi k}=1}{=} \frac{i}{4k}$$

Aufgabe 3 Wie lautet die Fouriertransformierte von $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{a} \text{ für } |x| < a \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$

Hinweis: $\int xe^{-ikx}dx = e^{-ikx}\left(\frac{1}{k^2} + \frac{ix}{k}\right)$

Lösung 3

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1 - \frac{|x|}{a}\right)e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}\left(1 - \frac{|x|}{a}\right)e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\overbrace{\int_{-a}^{a} e^{-ikx}dx}^{=:I_1} - \overbrace{\int_{-a}^{a}\frac{|x|}{a}e^{-ikx}dx}^{=:I_2}\right]$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{ie^{-ika}}{k} - \frac{ie^{ika}}{k} \\
I_2 &= \int_{-a}^{0}\frac{-x}{a}e^{-ikx}dx + \int_{0}^{a}\frac{x}{a}e^{-ikx}dx = \left[-e^{-ikx}\left(\frac{ix}{ak} + \frac{1}{ak^2}\right)\right]_{-a}^{0} + \left[e^{-ikx}\left(\frac{ix}{ak} + \frac{1}{ak^2}\right)\right]_{0}^{a} \\
&= -\frac{1}{ak^2} + e^{ika}\left(\frac{1}{ak^2} - \frac{i}{k}\right) + e^{-ika}\left(\frac{i}{k} + \frac{1}{ak^2}\right) - \frac{1}{ak^2} \\
I_1 - I_2 &= \frac{ie^{-ika}}{k} - \frac{ie^{ika}}{k} + \frac{2}{ak^2} - e^{ika}\left(-\frac{i}{k} + \frac{1}{ak^2}\right) - e^{-ika}\left(\frac{i}{k} + \frac{1}{ak^2}\right) \\
&= \frac{2}{ak^2} - \frac{e^{ika}}{ak^2} - \frac{e^{-ika}}{ak^2} = \frac{2 - 2\cos(ka)}{ak^2} \\
&\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(I_1 - I_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2 - 2\cos(ka)}{ak^2}
\end{aligned}$$

3 Matrixexponential und Differentialgleichungen

Aufgabe 4

(i) Berechnen Sie das Matrixexponential der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(ii) Berechnen Sie das Matrixexponential der Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (Sie brauchen die Transformationsmatrizen nicht explizit auszurechnen).

Lösung 4

(i) Die Matrix ist nilpotent. Es gilt $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Mit der Definition des Matrixexponentials lässt sich schnell berechnen:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) Die Matrix hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$ und $\lambda_3 = 4$. Mit den Transformationsmatrizen T und T^{-1}, wobei T aus den Eigenräumen zu den EW besteht, folgt:

$$e^{Bt} = T \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{pmatrix} T^{-1}$$

Aufgabe 5
(i) Berechnen Sie das AWP

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \vec{x},\ \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Das Inverse von $\begin{pmatrix} \frac{1}{72} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{72} \\ \frac{1}{9} & 0 & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{9}{8} \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 8 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) Die Differentialgleichung der gedämpften Schwingung lautet

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,\ \mu \geq 0, \omega_0 > 0$$

Mit dem Ansatz $y_1 = x$, $y_2 = \dot{x}$ forme man diese DGL um in ein lineares System 1. Ordnung $\dot{y} = Ay$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Lösen Sie das AWP für den Sonderfall $\mu = \omega_0$ mit den Anfangsbedingungen $\vec{x}_0 = {}^t(1,0)$ mit Hilfe des Matrixexponentials.

Lösung 5
(i) Die Matrix hat die Eigenwerte 5, -4 und -3. Die Eigenräume zu diesen Eigenwerten sind:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 8 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sodass

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Die Lösung des AWP ergibt sich zu:

$$a^{At} \cdot \vec{x}_0 = T \cdot \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-4t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \cdot T^{-1} \cdot \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(e^{5t} - e^{-3t}) \\ e^{5t} \\ \frac{1}{8}(e^{5t} - e^{-3t}) \end{pmatrix}$$

Alternativ:
Wenn wir die Eigenräume der Matrix für die einzelnen EW kennen, können wir sagen,

dass die Lösung der DGL lautet:

$$x_1 = c_1e^{5t} + 10c_2e^{-4t} + c_3e^{-3t}$$
$$x_2 = 8c_1e^{5t} - c_2e^{-4t}$$
$$x_3 = c_1e^{5t} + c_2e^{-4t} + c_3e^{-3t}$$

Wenn nun der Anfangswert $x(0) = {}^t(0,1,0)$ sein soll, folgt die gleiche Lösung.

(ii) Mit dem Ansatz $y_1 = x$, $y_2 = \dot{x}$ erhalten wir das folgende lineare System:

$$\dot{y}_1 = y_2$$
$$\dot{y}_2 = -\omega_0^2 y_1 - 2\mu y_2$$

also

$$A\vec{y} = \dot{\vec{y}} \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\mu \end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Die Matrix A ist allerdings nicht ohne weiteres diagonalisierbar. Die Matrix hat den doppelten EW $\lambda_1 = -\omega_0$ mit $g_A(1) = 1$ also haben wir folgende Jordanmatrix:

$$J = \begin{pmatrix} -\omega_0 & 1 \\ 0 & -\omega_0 \end{pmatrix}$$

mit der Jordanbasis

$$T = \begin{pmatrix} \omega_0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}, \; T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\omega_0^2} \\ 1 & \frac{1}{\omega_0} \end{pmatrix}$$

also $T^{-1}AT = J$. Nun können wir das Matrixexponential berechnen:

$$e^{At} = Te^{Jt}T^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-\omega_0 t}(1+\omega_0 t) & te^{-\omega_0 t} \\ -\omega_0^2 te^{-\omega_0 t} & -e^{-\omega_0 t}(\omega_0 t - 1) \end{pmatrix}$$

Nun ist eine Lösung $\vec{x}$ für die gegebenen Anfangsbedingungen $\vec{x} = e^{At} \cdot \vec{x}_0$
$= {}^t(e^{-\omega_0 t}(1+\omega_0 t), -\omega_0^2 e^{-\omega_0 t})$

Aufgabe 6
Untersuchen Sie die folgenden DGL auf Ordnung und Linearität:
(i) $\dot{x}(t) = -(x(t))^2 + 2x(t) - 4$
(ii) $\ddot{x}(t) = -\dot{x}(t) + 2x(t)$
(iii) $0 = (\ddot{x})^2 - 3x(t)$

Lösung 6
(i) Nichtlineare DGL 1. Ordnung
(ii) Lineare DGL 2. Ordnung
(iii) Nichtlineare DGL 2. Ordnung

Aufgabe 7
Lösen Sie die folgenden AWP mit Hilfe der Trennung der Variablen:
(i) $\dot{x}(t) = t \cdot x(t)$ mit x(0) = 1
(ii) $x(t) = t\dot{x}(t)$ mit x(1) = 2
(iii) $\dot{x}(t) = -t(x(t))^2$ mit x(1) =2
(iv) $t = x(t)\dot{x}(t)$ mit x(0) = 2

Lösung 7
(i)

$$\begin{aligned} &\dot{x} = \frac{dx}{dt} \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = t \cdot x \\ &\int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = \int\limits_{0}^{t} t \; dt \\ &\Rightarrow \log\left(\frac{x}{x_0}\right) = \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

Mit $x(0) = 1$ folgt $x_0 = 1 \Leftrightarrow x(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$

(ii) Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned} &\frac{x}{\dot{x}} = \frac{1}{t} \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = \log t \\ &\Rightarrow x = t \cdot x_0 \end{aligned}$$

Mit $x(1) = 2$ folgt $x_0 = 2 \Rightarrow x(t) = 2t$

(iii)

$$\frac{\dot{x}}{x^2} = -t \overset{x=s}{\Rightarrow} \int \frac{ds}{s^2} = -\int t^2 dt \Rightarrow -\frac{1}{x} = -\frac{t^2}{2} + c \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{t^2}{2}$$

Aus $x(1) = 2$ folgt $\frac{1}{x(2)} = \frac{1}{2} + c \Leftrightarrow c = 0 \Leftrightarrow x(t) = \frac{2}{t^2}$

(iv) Mit $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ folgt:

$$\begin{aligned} &x\dot{x} = x\frac{dx}{dt} = t \Leftrightarrow \int\limits_{x_0}^{x} x \; dx = \int\limits_{0}^{t} t \; dt \\ &\frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} = \frac{t^2}{2} \\ &\Rightarrow x = \sqrt{t^2 + x_0^2} \overset{x(0)=2}{=} \sqrt{t^2 + 4} \end{aligned}$$