**Aufgabe 1** *Zum Aufwärmen: Polynomdivision*

Berechnen Sie: $(x^5 + 2x^4 - 6x^3 - 10x^2 + x + 4) : (x^2 + 2x + 1)$

*Lösung:*

$$
\begin{aligned}
&\big(x^5 + 2x^4 - 6x^3 - 10x^2 + x + 4\big) : \big(x^2 + 2x + 1\big) = x^3 - 7x + 4\\
&\underline{-x^5 - 2x^4 - x^3}\\
&\qquad -7x^3 - 10x^2 + x\\
&\qquad \underline{7x^3 + 14x^2 + 7x}\\
&\qquad\qquad 4x^2 + 8x + 4\\
&\qquad\qquad \underline{-4x^2 - 8x - 4}\\
&\qquad\qquad\qquad 0
\end{aligned}
$$

**Aufgabe 2** *Logarithmus*

Zeigen Sie, dass für den Logarithmus gilt: $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, indem Sie:

a) den Grenzwert des Differenzenquotienten unter Zuhilfenahme der Rechenregeln für den Logarithmus bilden.

*Lösung:*

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{\ln(x) - \ln(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x_0 + h) - \ln(x_0)}{x_0 + h - x_0} \overset{\substack{\text{Setze}\\ x_0 =: x}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x + h) - \ln(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \left( \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) \cdot \frac{1}{h} \right)\\
&= \lim_{h\to 0} \left( \ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{1/h} \right) = \lim_{h\to 0} \left( \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{1/h} \right) \overset{\substack{\text{Setze}\\ 1/h =: k}}{=} \lim_{k\to\infty} \left( \ln\left(1 + \frac{\frac{1}{x}}{k}\right)^{k} \right)\\
&\overset{\ln \text{ stetig}}{=} \ln\left( \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{\frac{1}{x}}{k}\right)^{k} \right) = \ln\left(\exp\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

b) die Ableitung mit der Umkehrfunktion bilden.

*Lösung:*

$$(\ln y)' = \frac{1}{\exp'(x)} = \frac{1}{\exp(x)} = \frac{1}{\exp(\ln(y))} = \frac{1}{y}$$

**Aufgabe 3** *Korrolar: Quotientenregel*

Zeigen Sie die Quotientenregel. Sie dürfen Summen-, Produkt- und Kettenregel sowie die Ableitungen von Potenzfunktionen als gegeben und bewiesen annehmen.

*Lösung:*

Seien $f$ und $g$ wie in der Vorlesung gefordert. Dann ist:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\frac{1}{g}\right)' = f'\frac{1}{g} + f\left(\frac{1}{g}\right)' = f'\frac{1}{g} + f\left(g^{-1}\right)' = f'\frac{1}{g} + f\left(-g^{-2}\right)g' = f'\frac{1}{g} - f\frac{1}{g^2}g' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

**Aufgabe 4** *Spezielle Ableitungen*

Leiten Sie $f(x) = x^x$ und $g(x) = \operatorname{arcsinh}(x)$ mittels spezieller Ableitungstechniken ab.

*Lösung:*

1. Es ist $f(x) = x^x = \exp(x \ln x)$. Dann leiten wir einfach ab:

$$f'(x) = \exp(x \ln x)(x \ln x)' = x^x(1 + \ln x)$$

2. Wir substituieren: $x = \sinh y$, also f(y) = y

$$g'(y) = 1 = \operatorname{arcsinh}'(\sinh y) \cdot \sinh' y = \operatorname{arcsinh}'(\sinh y) \cdot \cosh y$$

Wir wissen außerdem die Identität: $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1 \implies \cosh y = \sqrt{1 + \sinh^2 y}$. Also:

$$\operatorname{arcsinh}'(\sinh y) = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 y}} \implies \operatorname{arcsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

**Aufgabe 5** *Wendetangente und Extrema*

Gegeben sei: $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$
Geben Sie Art und Lage der Extrema und bestimmen Sie Nullstellen sowie die Tangente an den Wendepunkt.
*Lösung:*

Zunächst bestimmen wir eine Nullstelle. Durch scharfes Hinsehen können wir eine Nullstelle finden, z.B. $x = 1$. Dann wenden wir Polynomdivision an:

$$\begin{array}{l}
\big(\ \ x^3 + 3x^2 \ \ - x - 3\big) : \big(x - 1\big) = x^2 + 4x + 3 \\
\underline{-x^3 \ \ + x^2} \\
\qquad\quad 4x^2 \ \ - x \\
\qquad\ \underline{-4x^2 + 4x} \\
\qquad\qquad\quad 3x - 3 \\
\qquad\qquad\ \underline{-3x + 3} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Dann können durch Satz von Vieta oder Lösungsformel die weiteren Nullstellen gefunden werden: $x = -3$ und $x = -1$
Wir benötigen nun die ersten 3 Ableitungen:

- $f'(x) = 3x^2 + 6x - 1$
- $f''(x) = 6x + 6$
- $f'''(x) = 6$

Es ist $f'(x) = 3x^2 + 6x - 1 \stackrel{!}{=} 0$. Per Lösungsformel finden wir: $x_{+,-} = -1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$
Entweder wir kennen den Verlauf des Graphen von $-\infty$ nach $+\infty$ und wissen daher schon, dass die Minus-Lösung das Maximum und die andere ein Minimum ist, oder wir benutzen die 2. Ableitung: $f''(x_-) = -4\sqrt{3} < 0$ und $f''(x_+) = 4\sqrt{3} > 0$
Nun die Wendetangente: $f''(x) = 6x + 6 \stackrel{!}{=} 0$, also $x = -1$.
Offensichtlich ist $f'''(-1) = 6b \neq 0$, also haben wir einen Wendepunkt. Weiterhin ist: $f'(-1) = -4$
$y(x) = f'(x) \cdot x + t$ wird von $(x, y) = (-1, 0)$ gelöst, also ist $t = -4$ und somit: $y(x) = -4x - 4$

**Aufgabe 6** *Verschiedene Integrale*

Bestimmen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Techniken, die in der Vorlesung behandelt wurden.

*Lösung:*

a) Substituiere $t = (2 - 3x)$, $dx = -\frac{1}{3}dt$

$$\int (2 - 3x)^4 dx = \int t^4 \cdot \frac{-1}{3} dt = \frac{-1}{15} t^5 = \frac{-1}{15} \cdot (2 - 3x)^5$$

b) Substituiere $t = x^2$, $2xdx = dt$ und $\sin t = u$, $\cos tdt = du$

$$\int 2x\cot(x^2)dx = \int \cot tdt = \int \frac{\cos t}{\sin t}dt = \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|\sin t| = \ln|\sin x^2|$$

c) Substituiere $\sqrt{1+x} = t$, $1+x = t^2$, $dx = 2tdt$

$$\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}} = \int \frac{2dt}{1+t^2} = 2\arctan t = 2\arctan\sqrt{1+x}$$

d) Partielle Integration

$$\int 9x^2\ln|x|dx = 3x^3\ln|x| - \int 3x^3\cdot\frac{1}{x}dx = 3x^3\ln|x| - x^3$$

e) Logarithmisch: Zähler als Ableitung des Nenners; oder: Substitution

$$\int \tan xdx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx = -\ln|\cos x|$$

f) Partielle Integration

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}dx = x\tan x - \int 1\cdot\tan xdx = x\tan x + \ln|\cos x|$$

g) Zweifache partielle Integration

$$\int e^x\sin xdx = e^x\sin x - \int e^x\cos xdx = e^x\sin x - e^x\cos x - \int e^x\sin xdx$$

$$\xRightarrow[\text{nach links}]{\text{Integral}} \int e^x\sin xdx = \frac{1}{2}e^x\left(\sin x - \cos x\right)$$

h) Substituiere $x^2+\cos^2 x = t$, $dt = 2(x - \cos x\sin x)dx$

$$\int \frac{x-\cos x\sin x}{x^2+\cos^2 x}dx = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2}\ln|t| = \frac{1}{2}\ln|x^2+\cos^2 x|$$

i) Geschicktes Einfügen einer 0, partielle Integration:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{1}{x^2+1}dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx = \arctan x - \frac{1}{2}\int x\cdot\frac{2xdx}{(x^2+1)^2}$$

$$\overset{verwende}{\Longrightarrow} \int \frac{2xdx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{1}{f^2}\cdot f'dx = \frac{-1}{f} = \frac{-1}{x^2+1}$$

$$\overset{PI}{\Longrightarrow} \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \arctan x - \frac{1}{2}\left(x\cdot\frac{-1}{x^2+1} - \underbrace{\int \frac{-1}{x^2+1}dx}_{arctan}\right) = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}$$

Alternativ: Geschicktes Einfügen einer 1, partielle Integration:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \underbrace{\frac{1}{2x}}_{v}\underbrace{\frac{2x}{(x^2+1)^2}}_{v'}dx \overset{PI}{=} \frac{-1}{2x(x^2+1)} - \int \frac{dx}{2x^2(x^2+1)}$$

$$\overset{PBZ}{\Longrightarrow} \frac{dx}{x^2(x^2+1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}$$

Das können wir nun Integrieren und dann noch zusammenfassen und erhalten das gleiche Ergebnis wie oben.

j) Polynomdivision, Partialbruchzerlegung, Substitution
Zuerst müssen wir uns $\int \frac{x^6+16}{x^4-4}dx$ in handhabbare Stücke zerlegen.

$$\begin{array}{l} \big(\quad x^6 \qquad\quad + 16\big) : \big(x^4 - 4\big) = x^2 + \dfrac{4x^2+16}{x^4-4} \\ \underline{-x^6 + 4x^2} \\ \qquad\quad 4x^2 \end{array}$$

Also haben wir ein zunächst ein leichtes Integral zu lösen und eines über einen Bruch, der per Partialbruchzerlegung aufgelöst werden muss:

$$\frac{4x^2+16}{x^4-4} = \frac{4x^2+16}{(x^2+2)(x^2-2)} = \frac{4x^2+16}{(x^2+2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}$$

Wir können den Term $(x^2+2)$ so stehen lassen, da wir wissen, dass er 2 einfache komplexe Nullstellen hat (wir aber nur reelle Brüche brauchen) und wir diesen später mit arctan integrieren können. Wir setzen an:

$$\frac{4x^2+16}{(x^2+2)(x^2-2)} = \frac{A}{x^2+2} + \frac{B}{x-\sqrt{2}} + \frac{C}{x+\sqrt{2}} = \frac{A(x^2-2)+B(x^2+2)(x+\sqrt{2})+C(x^2+2)(x-\sqrt{2})}{(x^2+2)(x^2-2)}$$

Nun setzen wir der Reihe nach im Zähler 3 Nullstellen ein: $x=\sqrt{2}$, $x=-\sqrt{2}$ und $x=i\sqrt{2}$. Wir erhalten der Reihe nach:

- $x=\sqrt{2}$: $24 = 8\sqrt{2}B \implies B = \frac{3}{\sqrt{2}}$
- $x=-\sqrt{2}$: $24 = -8\sqrt{2}C \implies C = -\frac{3}{\sqrt{2}}$
- $x=i\sqrt{2}$: $8 = -4A \implies A = -2$

Also liefert die PBZ:

$$\frac{4x^2+16}{x^4-4} = -\frac{2}{x^2+2} - \frac{3}{\sqrt{2}(x+\sqrt{2})} + \frac{3}{\sqrt{2}(x-\sqrt{2})}$$

Nun führen wir Umformungen und Substitutionen durch, um die Integrale zu lösen, einmal $u = x-\sqrt{2}$, $du = dx$ und einmal $s = x+\sqrt{2}$, $dx = ds$:

$$\int \left(x^2 - \frac{2}{x^2+2} - \frac{3}{\sqrt{2}(x+\sqrt{2})} + \frac{3}{\sqrt{2}(x-\sqrt{2})}\right)dx = \frac{1}{3}x^3 - \int \frac{2}{2\left(\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)}dx - \frac{3}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{s}ds + \frac{3}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{u}du = ⓧ$$

Um das 1. Integral lösen zu können, substituieren wir auch hier: $\frac{x}{\sqrt{2}} = t$, $dx = \sqrt{2}dt$

$$ⓧ = \frac{1}{3}x^3 - \int \frac{1}{t^2+1}\sqrt{2}dt - \frac{3}{\sqrt{2}}\ln s + \frac{3}{\sqrt{2}}\ln u = \frac{1}{3}x^3 - \sqrt{2}\arctan(t) - \frac{3}{\sqrt{2}}\ln|s| + \frac{3}{\sqrt{2}}\ln|u|$$

Nun müssen wir noch resubstituieren und die Logarithmen zusammenfassen, dann sind wir fertig:

$$\int \frac{x^6+16}{x^4-4} == \frac{1}{3}x^3 - \sqrt{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{3}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|$$

k) Substitutiere $g^{-1}(x) = x^2 = t$ und $2xdx = dt$

$$\int_0^2 2xe^{x^2}dx = \int_{g^{-1}(0)}^{g^{-1}(2)} e^t dt = \int_0^4 e^t = \left[e^t\right]_0^4 = e^4 - 1$$

l) Substituiere $g^{-1}(x) = \sin x = t$, $\cos x dx = dt$ und verwende $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{1-\sin x}dx = \int_0^{\pi/2} \frac{(1-\sin^2 x)\cdot\cos x}{1-\sin x}dx = \int_{g^{-1}(0)}^{g^{-1}(\pi/2)} \frac{1-t^2}{1-t}dt = \int_0^1 (1+t)dt = \left[t + \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}$$

Genau genommen haben wir hier ein *scheinbar* uneigentliches Integral (Nenner =0 an oberer Grenze). Jedoch zeigt die Substitution: Es liegt eine hebbare Unstetigkeitsstelle vor.

m) Umschrift mittels komplexer Identität. Es ist somit nicht nötig, ein Additionstheorem zu verwenden, es ergibt sich automatisch

$$\int \cos^2(t)e^t dt = \int \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2 e^t dt = \int \frac{1}{4}\left(e^{2it}+e^{-2it}+2e^0\right)e^t dt = \int \frac{e^t}{2}dt + \frac{1}{4}\int \left(e^{t(1+2i)}+e^{t(1-2i)}\right)dt$$

$$= \frac{e^t}{2} + \frac{e^{t(1+2i)}}{4(1+2i)} + \frac{e^{t(1-2i)}}{4(1-2i)} = \frac{e^t}{2} + e^t \cdot \frac{e^{2it}(1-2i)+e^{-2it}(1+2i)}{4(1+2i)(1-2i)} = \frac{e^t}{2} + e^t \cdot \frac{e^{2it}+e^{-2it}-2ie^{2it}+2ie^{-2it}}{4\cdot 5}$$

$$= \frac{e^t}{2} + e^t \cdot \frac{\cos(2t)}{10} + e^t \cdot \frac{\sin(2t)}{5}$$

**Aufgabe 7** *Riemann-Summe*

Berechnen Sie den Wert der folgenden Summe, in dem Sie diese als Riemann-Summe auffassen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^2$$

*Lösung:*

Durch genaues Hinsehen der bereits vorteilhaft notierten Aufgabenstellung erkennt man, dass wir eine Teilung $T_k = \frac{2k}{n} =: x_k$ vorliegen haben. Außerdem ist leicht zu erkennen, dass für $n \to \infty$ der kleinste Wert der Teilung (also $k = 0$) 0 und der größte Wert (also $k = n$) 2 ist. Weiterhin sehen wir, dass der Abstand zweier Teilungspunkte $\Delta x_k := \frac{2}{n}$ ist.

Wir haben also eine Summe der Form

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \Delta x_k \cdot f(x_k)$$

Diese können wir laut Vorlesung nun leicht in ein Integral umschreiben:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n}\frac{2}{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^2 = \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

**Aufgabe 8** *Konvergenz von Integralen (Klausuraufgaben)*

Untersuchen Sie folgende uneingentliche Integral auf Konvergenz.

a)

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx$$

**Hinweis:** Teilen Sie das Integral, substitieren Sie und schätzen Sie geschickt ab.

*Lösung:*

$$0 \le \int_0^\infty \sin x^2 dx = \int_0^1 \sin x^2 dx + \overbrace{\int_1^\infty \sin x^2 dx}^{\text{Substiutiere } x=1/t} \le \int_0^1 1 dx + \int_1^\infty \frac{-\sin\frac{1}{t^2}}{t^2} dt \le 1 + \int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt =$$

$$= 1 + \left[\frac{-1}{t}\right]_1^\infty = 1 + 0 + 1$$

Dass das Integral größer Null ist, lässt sich leicht zeigen, wenn man es in Stücke zu $x^2 = n \cdot 2\pi$ teilt, und feststellt, dass diese immer größer Null sind. Wir konnten eine konvergente Majorante finden, also konvergiert das Integral.

b) für $r \in \mathbb{R}$:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^r}$$

**Hinweis:** Betrachten Sie zunächst eine endliche Integrationsgrenze.

*Lösung:*

Für $r = 1$ haben wir den Logarithmus als Stammfunktion, dieser ist monoton und unbeschränkt, also divergiert das Integral.

Wir betrachten danach laut Hinweis zunächst eine endliche Integrationsgrenze $t$ und $r \neq 1$:

$$\int_1^t \frac{dx}{x^r} = \left[\frac{1}{1-r} \cdot \frac{1}{x^{r-1}}\right]_1^t = \frac{1}{1-r}\left(\frac{1}{t^{r-1}} - 1\right)$$

Für $r < 1$ können wir den Faktor mit $t$ in den Zähler hochziehen und sehen sofort, dass das Integral divergiert für $t \to \infty$.
Für $r > 1$ können wir den Grenzwert bilden und erhalten: $\frac{1}{r-1}$
Also insgesamt:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^r} = \begin{cases} \dfrac{1}{r-1} & r > 1 \\ \infty & r \leq 1 \end{cases}$$

**Aufgabe 9** *L'Hospital?*

Wenden Sie die verschiedenen gelernten Techniken an, um die folgenden Grenzwerte zu bestimmen.

*Lösung:*

a)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \cdot 1 = 1$$

c) Bei direktem und mehrmaligem Anwenden von L'Hospital drehen wir uns im Kreis. Statt dessen Definiton des sinh / cosh:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$$

d) Hier wäre L'Hospital direkt möglich, aber nicht zu empfehlen. Besser:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{\frac{\arctan x}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\arctan x}}_{2/\pi} \overset{\frac{1}{x}=y}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{e^y - 1}{y} \cdot \frac{2}{\pi} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{e^y}{1} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

e) **Hinweis:** $\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \mathcal{O}(x^6)$
4 mal L'Hospital liefert das Ergebnis, ist aber extrem viel Arbeit. Besser: Verwende bekannte Potenzreihen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 \mp \dots) - (1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \dots)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x^4 + \dots}{x^4} \overset{4xL'H}{=} \frac{1}{6}$$

Wir haben zuerst verwendet, dass alle Terme im Zähler mit Grad größer 4 für $x \to 0$ verschwinden. Dann bleiben nur Terme mit Grad 4 oder kleiner. Bei diesen können wir entweder scharf hinsehen oder 4 mal L'Hospital anwenden (das wirft alle Terme mit Grad kleiner 4 raus) und erhalten das Ergebnis.