

**Aufgabe 1** *Zum Aufwärmen: Polynomdivision*

Berechnen Sie:  $(x^5 + 2x^4 - 6x^3 - 10x^2 + x + 4) : (x^2 + 2x + 1)$

**Aufgabe 2** *Logarithmus*

Zeigen Sie, dass für den Logarithmus gilt:  $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ , indem Sie:

- a) den Grenzwert des Differenzenquotienten unter Zuhilfenahme der Rechenregeln für den Logarithmus bilden.
- b) die Ableitung mit der Umkehrfunktion bilden.

**Aufgabe 3** *Korrolar: Quotientenregel*

Zeigen Sie die Quotientenregel. Sie dürfen Summen-, Produkt- und Kettenregel sowie die Ableitungen von Potenzfunktionen als gegeben und bewiesen annehmen.

**Aufgabe 4** *Spezielle Ableitungen*

Leiten Sie  $f(x) = x^x$  und  $g(x) = \operatorname{arcsinh}(x)$  mittels spezieller Ableitungstechniken ab.

**Aufgabe 5** *Wendetangente und Extrema*

Gegeben sei:  $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$

Geben Sie Art und Lage der Extrema und bestimmen Sie Nullstellen sowie die Tangente an den Wendepunkt.

**Aufgabe 6** *Verschiedene Integrale*

Bestimmen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Techniken, die in der Vorlesung behandelt wurden.

- a) 
$$\int (2 - 3x)^4 dx$$
- b) 
$$\int 2x \cot(x^2) dx$$
- c) 
$$\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}$$
- d) 
$$\int 9x^2 \ln|x| dx$$
- e) 
$$\int \tan x dx$$
- f) 
$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

g)

$$\int e^x \sin x dx$$

h)

$$\int \frac{x - \cos x \sin x}{x^2 + \cos^2 x} dx$$

i) **Hinweis:** Fügen Sie eine geschickte multiplikative 1 oder additive 0 (im Zähler) hinzu und teilen Sie dann das Integral:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$$

j) **Hinweis:** Partialbruchzerlegung,  $(x^2 + 2)$  muss nicht in komplexe Nullstellen zerlegt werden. Verwende außerdem  $\arctan$  und  $\ln$  zum integrieren:

$$\int \frac{x^6 + 16}{x^4 - 4} dx$$

k)

$$\int_0^2 2xe^{x^2} dx$$

l)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{1 - \sin x} dx$$

m) (Klausuraufgabe)

$$\int \cos^2(t)e^t dt$$

### Aufgabe 7 Riemann-Summe

Berechnen Sie den Wert der folgenden Summe, in dem Sie diese als Riemann-Summe auffassen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{k=0}^n \left( \frac{2k}{n} \right)^2$$

### Aufgabe 8 Konvergenz von Integralen (Klausuraufgaben)

Untersuchen Sie folgende uneigentliche Integral auf Konvergenz.

a)

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 dx$$

**Hinweis:** Teilen Sie das Integral, substituieren Sie und schätzen Sie geschickt ab.

b) für  $r \in \mathbb{R}$ :

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^r}$$

**Hinweis:** Betrachten Sie zunächst eine endliche Integrationsgrenze.

### Aufgabe 9 L'Hospital?

Wenden Sie die verschiedenen gelernten Techniken an, um die folgenden Grenzwerte zu bestimmen.

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{1/x} - 1) / \frac{\arctan x}{x}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$

**Hinweis:**  $\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \mathcal{O}(x^6)$