Technische Universität München
Hannah Schamoni

Ferienkurs Analysis 1
Stetigkeit, Konvergenz, Topologie

Lösung

21.03.2012

1. Gleichmäßige Konvergenz
Entscheiden Sie, ob die folgenden auf $(0, \infty)$ definierten Funktionenfolgen nicht, punktweise oder sogar gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion konvergieren. Geben Sie, falls existent, den Grenzwert an.
(a) $a_n = x + \frac{1}{n}$ (b) $a_n = \frac{x}{n}$ (c) $a_n = e^x \cdot \sqrt[n]{e}$

Lösung:
(a) Die Funktionenfolge a_n konvergiert punktweise gegen $a(x) = x$, da für festes x die Folge $(x + \frac{1}{n})$ nach den Rechenregeln für Folgen gegen x strebt. Die Konvergenz ist sogar gleichmäßig, denn unabhängig von x ist $\forall \epsilon > 0$
$|a_n - a| = |x + \frac{1}{n} - x| = \frac{1}{n} < \epsilon$,
falls $n > N := \frac{1}{\epsilon}$.

(b) Die Funktionenfolge a_n konvergiert zunächst punktweise gegen die Nullfunktion $a(x) = 0$, da für jedes feste $x > 0$ die Zahlenfolge $\left(\frac{x}{n}\right)$ nach den Rechenregeln für Folgengrenzwerte eine Nullfolge ist. Die Konvergenz ist jedoch nicht gleichmäßig, denn angenommen, es gäbe zu $\epsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$, welches nur von ϵ abhängt, so dass $|a_n(x) - 0| < 1 \; \forall n > N$. Dann wählt man $n = N + 1$ und $x = N + 2$ (es muss ja für jedes $x > 0$ gelten) und erhält den Widerspruch $|a_n(x) - 0| = \left|\frac{N+2}{N+1}\right| > 1 = \epsilon$.

(c) Die Funktionenfolge a_n lässt sich umschreiben zu $a_n(x) = e^{x+\frac{1}{n}}$. Nach (a) konvergiert $(x + \frac{1}{n})$ für festes x gegen x und da die Exponentialfunktion stetig ist, konvergiert damit $a_n(x)$ (punktweise) gegen $a(x) = e^x$ für $n \to \infty$. Die Konvergenz ist jedoch nicht gleichmäßig: Sei $n > N$. Dann gilt:
$|a_n(x) - c(x)| = e^x |e^{\frac{1}{n}} - 1|$.
Die rechte Seite der Gleichung ist dabei nicht Null und kann durch Erhöhung von x beliebig groß gemacht werden, so dass sie jedes zuvor gewählte ϵ übersteigt. Also muss N in Abhängigkeit von x gewählt werden.

2. Stetigkeit

(a) Sei $s \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x^s$ stetig ist.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$ für $x \neq 0$ und $f(x) = 0$ für $x = 0$. Zeigen Sie, dass f stetig ist.

Lösung:

(a) Es ist $x^s = \exp(s \ln(x))$. Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, x \mapsto \exp(x)$ ist stetig und streng monoton wachsend.
Außerdem ist die Umkehrfunktion $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \ln(\exp(x)) = x$ ebenfalls stetig und streng monoton wachsend.
Also ist f als Verknüpfung stetiger Funktionen $x \mapsto \ln(x) \mapsto s \ln(x) \mapsto \exp(s \ln(x)) = x^s$ stetig.

(b) Auf $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ ist f stetig als Verknüpfung stetiger Funktionen.
Es gilt: $|\sin(\frac{1}{x})| \leq 1 \ \forall x \neq 0$ und $\lim\limits_{x \to 0, x \neq 0} x = 0$.
Daraus folgt auch, dass $\lim\limits_{x \to 0, x \neq 0} x |\sin(\dfrac{1}{x})| = 0$.
Die Funktion $\widetilde{f} : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto x \sin(\frac{1}{x})$ wird also durch den Funktionswert 0 stetig in 0 fortgesetzt. Also ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.

3. Gleichmäßige Stetigkeit I

(a) Sei $f : [\, 0, \infty \,[\to \mathbb{R}$ stetig derart, dass $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) =: c \in \mathbb{R}$ existiert.
Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) = f(x+1)$. Zeigen Sie, dass f nach oben und unten beschränkt ist und Maximum und Minimum annimmt. Zeigen Sie außerdem, dass f gleichmäßig stetig ist.

Lösung:

(a) Sei $\epsilon > 0$. Es ist zu zeigen, dass dann $\delta > 0$ existiert, so dass $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, falls $|x - y| < \delta$ ist.
Wegen $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = c$ gibt es ein $x_0 > 0$ mit $|f(x) - c| < \frac{\epsilon}{4}$ für $x \geq x_0$.
Für $x, y \geq x_0$ gilt also:
$|f(x) - f(y)| = |f(x) - c + c - f(y)| \leq |f(x) - c| + |f(y) - c| < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2}$ (1)
Da $[0, x_0]$ kompakt ist, existiert $\delta > 0$, so dass für $x, y \in [0, x_0]$ gilt:
$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$ (2)
Gilt $x \leq x_0$ und $y > x_0$ (Fall $y \leq x_0$ und $x > x_0$ analog), so folgt aus $|x - y| < \delta$ auch $|x - x_0| < \delta$.
Aus (1) und (2) folgt also:
$|f(x) - f(y)| = |f(x) - f(x_0) + f(x_0) - f(y)| \leq$
$|f(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ (3).

Aus (1), (2) und (3) folgt, dass für alle $x, y \in [\,0, \infty\,[$ mit $|x-y| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.
Alternativer Beweis:
Wegen $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$ gibt es ein $x_0 > 0$ mit $|f(x) - c| < \frac{\epsilon}{2}$ für $x \geq x_0$.
Für $x, y \geq x_0$ gilt also:
$|f(x) - f(y)| = |f(x) - c + c - f(y)| \leq |f(x) - c| + |f(y) - c| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$
Der restliche Definitionsbereich $[0, x_0]$ ist kompakt, weshalb f dort gleichmäßig stetig ist.
f ist also auf dem gesamten Definitionsbereich stetig.

(b) *Beschränktheit*: Es gilt $f(\mathbb{R}) = f([0,1])$. Da f auf $[0,1]$ eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge ist, nimmt f dort Maximum und Minimum an und ist insbesondere durch diese beschränkt.
Glm. Stetigkeit: Sei $\epsilon > 0$. Da f gleichmäßig stetig ist auf dem kompakten Intervall $[0,2]$ gibt es ein $\delta' > 0$ mit $x, y \in [0,2]\,, |x-y| < \delta' \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$.
Sei nun $\delta = \min(\delta', 1)$ und seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta$.
1. Fall: Es gibt $n \in \mathbb{Z}$ mit $x, y \in [2n, 2n+2]$. Dann folgt
$|f(x) - f(y)| = |f(x - 2n) - f(y - 2n)| < \epsilon$.
2. Fall: Es gibt $n \in \mathbb{Z}$ mit $x \in [2n-1, 2n]$ und $y \in [2n, 2n+2]$ (bzw. x und y vertauscht).
Wegen $|x - y| < \delta \leq 1$ folgt $y \in [2n, 2n+1]$. Also gilt $x+1, y+1 \in [2n, 2n+2]$ und damit Fall 1.
Also gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x-y| < \delta$, dass $|f(x) - f(y)| < \epsilon \Rightarrow$ gleichmäßige Stetigkeit.
Alternativer Beweis:
Beweis der Beschränktheit wie oben. f ist periodisch und stetig an den Grenzpunkten beispielsweise von $[0,1]$. Damit ist f auf einem kompakten Intervall stetig, also gleichmäßig stetig.

4. Gleichmäßige Stetigkeit II
Untersuchen Sie, welche der folgenden Funktionen gleichmäßig stetig sind:
(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$
(b) $f : [10^{-4}, \infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$
(c) $f : [\sqrt{2}, 6] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^{2012} - 18}{46 + |x|^7}$.

Lösung:
(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ ist *nicht gleichmäßig stetig.*
Beweis(durch Widerspruch): Sei $\epsilon > 0$. Annahme: Es gibt $\delta > 0$, so dass für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $|x_1 - x_2| < \delta$ gilt: $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$.
Wegen $|(x + \frac{\delta}{2}) - x| < \delta$ würde dann folgen, dass $|f(x + \frac{\delta}{2}) - f(x)| < \epsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Es gilt aber für $x \neq -\delta/4$:

$\lim\limits_{x\to\infty}|f(x+\frac{\delta}{2})-f(x)| = \lim\limits_{x\to\infty}|x^2+\delta x+\frac{\delta^2}{4}-x^2| = \lim\limits_{x\to\infty}\delta|x+\frac{\delta}{4}| = \infty$, Widerspruch!

(b) $f:[10^{-4},\infty[\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x}$ ist *gleichmäßig stetig*:
Beweis: Sei $\epsilon>0$ und seien $x_1,x_2\geq 10^{-4}$. Dann gilt:
$|f(x_1)-f(x_2)| = \left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right| = \left|\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}\right| \leq \frac{1}{10^{-8}}|x_2-x_1| = 10^8|x_2-x_1|$.
Wählt man also $\delta=\frac{1}{10^8}\epsilon$, so folgt aus $x_1,x_2\in[10^{-4},\infty[$, $|x_1-x_2|<\delta$, dass $|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$.
Bemerkung: f ist mit $L=10^8$ sogar Lipschitz-stetig.
(c) $f:[\sqrt{2},6]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^{2012}-18}{46+|x|^7}$ ist stetig als Verknüpfung stetiger Funktionen; außerdem ist das Intervall $[\sqrt{2},6]$ kompakt. Es folgt die gleichmäßige Stetigkeit (stetige Funktion auf Kompaktum).

5. Gleichmäßige Stetigkeit, Lipschitz-Stetigkeit
Sei $f:[0,1]\,,f(x):=\sqrt{x}$. Zeigen Sie, dass die Funktion f gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig ist.

Lösung: f ist stetig auf dem kompakten Intervall $[0,1]$ und damit dort auch gleichmäßig stetig.
f ist aber nicht Lipschitz-stetig. Annahme: Es gibt $L>0$ mit $|f(x)-f(y)|\leq L|x-y|\ \forall x,y\in[0,1]$, d.h. $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}\leq L$ (falls $x\neq y$) $(*)$.
Da dies für alle $x,y\in[0,1]$ gelten muss, wähle man speziell $x_n=\frac{1}{n^2}, y_n=\frac{1}{4n^2}$. Dann gilt:
$\frac{|f(x_n)-f(y_n)|}{|x_n-y_n|} = \frac{|\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}|}{|\frac{1}{n^2}-\frac{1}{4n^2}|} = \frac{2n}{3}\to\infty$ für $n\to\infty$.
Dies ist ein Widerspruch zu $(*)$!

6. Stetige Fortsetzungen
(a) Ist $f:\mathbb{R}\backslash\{0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ stetig fortsetzbar?
(b) Ist $f:\mathbb{R}_+\backslash\{1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ stetig fortsetzbar?

Lösung:
(a) f ist stetig als Komposition stetiger Funktionen. Für $x_n=\frac{1}{\pi n}$ ist $f(x_n)=0$. Für $y_n=\frac{1}{2\pi n+\frac{1}{2}\pi}$ ist $f(y_n)=1$. Somit existiert $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ nicht, f ist also nicht stetig fortsetzbar.
(b) f ist stetig als Komposition stetiger Funktionen. Es gilt:
$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$.
f kann an der Stelle $x=1$ also durch $\frac{1}{2}$ stetig fortgesetzt werden.

7. Zwischenwertsatz

Zeigen Sie: Ein Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ungeraden Grades besitzt mindestens eine reelle Nullstelle.

Lösung: Sei $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $a_n \neq 0$ und n ungerade. O.E. sei $a_n > 0$.
Als Polynom ist p stetig. Für $x \neq 0$ gilt

$$p(x) = x^n \left(a_n + a_{n-1}x^{-1} + a_{n-2}x^{-2} + \ldots + a_0 x^{-n}\right).$$

Der Ausdruck in der Klammer konvergiert für $x \to \pm\infty$ gegen $a_n > 0$.
Somit gilt $\lim\limits_{x\to\pm\infty} p(x) = \pm\infty$. Es gibt also ein x_- mit $p(x_-) < 0$ und ein x_+ mit $p(x_+) > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $x_0 \in (x_-, x_+)$ mit $p(x_0) = 0$.

8. Grenzwerte

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 + x^2 - x - 1}{x - 1}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{4x^2 + 2x - 1} - 2x)$

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{8x^3 + 2x^2 + 1}{2x^3 + 7x}$

Lösung:

(a) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)^2(x-1)}{x-1} = 4$$

(b) $$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - (1 - x^2)}{x^2(1 + \sqrt{1 - x^2})} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{2}$$

(c) $$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{4x^2 + 2x - 1} - 2x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2 + 2x - 1 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + 2x - 1} + 2x} =$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{\sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} + 2} = \frac{1}{2}$$

(d) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{8x^3 + 2x^2 + 1}{2x^3 + 7x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{8 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}}{2 + \frac{7}{x^2}} = 4$$

9. Topologie

Zeigen Sie:

(a) $\mathbb{K}$ ist offen und abgeschlossen in $\mathbb{K}$, wobei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

(b) $\emptyset$ ist offen und abgeschlossen.

(c) $D \subset \mathbb{C}$ ist offen in $\mathbb{C} \Rightarrow D \cap \mathbb{R}$ ist offen in $\mathbb{R}$.

(d) $D \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R} \Rightarrow D$ ist abgeschlossen in $\mathbb{C}$.

Lösung: (a) $\mathbb{K}$ offen: Sei $z \in \mathbb{K}$. Wähle $\epsilon > 0$ beliebig. Dann ist $B_\epsilon(z) \subset \mathbb{K}$. Also ist $\mathbb{K}$ offene Teilmenge von $\mathbb{K}$.
$\mathbb{K}$ abgeschlossen: Sei (z_n) eine konvergente Folge in $\mathbb{K}$. Dann liegt auch der Genzwert z in $\mathbb{K}$. Also ist $\mathbb{K}$ abgeschlossen.

(b) $\emptyset$ offen: Nach (a) ist $\mathbb{K}$ abgeschlossen. Also ist $\mathbb{K} \backslash \mathbb{K} = \emptyset$ offen.
$\emptyset$ abgeschlossen: Nach (a) ist $\mathbb{K}$ offen. Also ist $\mathbb{K} \backslash \mathbb{K} = \emptyset$ abgeschlossen.

(c) Sei $x \in D \cap \mathbb{R}$. Da $D \subset \mathbb{C}$ offen ist, gibt es $r > 0$ mit $\{\widetilde{x} + i\widetilde{y} \in \mathbb{C} : \sqrt{(\widetilde{x} - x)^2 + \widetilde{y}^2} < r\} \subset D$.
Insbesondere gilt also: $\{\widetilde{x} \in \mathbb{R} : |\widetilde{x} - x| < r\} \subset D \cap \mathbb{R}$.
Also ist $D \cap \mathbb{R}$ offen in $\mathbb{R}$.
Bemerkung: Der Fall $D \cap \mathbb{R} = \emptyset$ folgt aus Teil (b).

(d) Sei (z_n) eine konvergente Folge in $\mathbb{C}$ mit $z_n \in D \ \forall n \in \mathbb{N}$. Sei $z = x + iy = \lim_{n\to\infty} z_n$.
Es gibt $z_n = x_n + iy_n$ mit $y_n = 0$. Da (z_n) als konvergente Folge auch eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ ist und $|z_n - z_m|_{\mathbb{C}} = |x_n - x_m|_{\mathbb{R}}$ ist, ist (x_n) Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ und daher konvergent gegen ein $\widetilde{x} \in \mathbb{R}$.
Da D abgeschlossen in $\mathbb{R}$ ist, gilt $\widetilde{x} \in D$. Da der Grenzwert einer Folge eindeutig ist und wegen $|z_n|_{\mathbb{C}} = |z_n|_{\mathbb{R}}$ für $z \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, folgt $\lim_{n\to\infty} z_n = z = \widetilde{x} \in D$.
Für jede konvergente Folge $(z_n) \subset \mathbb{C}$ mit $z_n \in D \ \forall n$ gilt also $\lim z_n \in D$.
D ist also abgeschlossen in $\mathbb{C}$.