Technische Universität München
Hannah Schamoni

Ferienkurs Analysis 1
Stetigkeit, Konvergenz, Topologie

Übungsblatt

21.03.2012

1. Gleichmäßige Konvergenz
Entscheiden Sie, ob die folgenden auf $(0,\infty)$ definierten Funktionenfolgen nicht, punktweise oder sogar gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion konvergieren. Geben Sie, falls existent, den Grenzwert an.
(a) $a_n = x + \frac{1}{n}$ (b) $a_n = \frac{x}{n}$ (c) $a_n = e^x \cdot \sqrt[n]{e}$

2. Stetigkeit
(a) Sei $s \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x^s$ stetig ist.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$ für $x \neq 0$ und $f(x) = 0$ für $x = 0$. Zeigen Sie, dass f stetig ist.

3. Gleichmäßige Stetigkeit I
(a) Sei $f : [\,0, \infty\,[\, \to \mathbb{R}$ stetig derart, dass $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) =: c \in \mathbb{R}$ existiert.
Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

(b) Sei $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) = f(x+1)$. Zeigen Sie, dass f nach oben und unten beschränkt ist und Maximum und Minimum annimmt. Zeigen Sie außerdem, dass f gleichmäßig stetig ist.

4. Gleichmäßige Stetigkeit II
Untersuchen Sie, welche der folgenden Funktionen gleichmäßig stetig sind:
(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ (b) $f : [10^{-4}, \infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$
(c) $f : [\sqrt{2}, 6] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^{2011}-18}{46+|x|^7}$.

5. Gleichmäßige Stetigkeit, Lipschitz-Stetigkeit
Sei $f : [0,1]\,, f(x) := \sqrt{x}$. Zeigen Sie, dass die Funktion f gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig ist.

6. Stetige Fortsetzungen
(a) Ist $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ stetig fortsetzbar?
(b) Ist $f : \mathbb{R}_+\backslash\{1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ stetig fortsetzbar?

7. Zwischenwertsatz
Zeigen Sie: Ein Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ungeraden Grades besitzt mindestens eine reelle Nullstelle.

8. Grenzwerte
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 + x^2 - x - 1}{x - 1}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{4x^2 + 2x - 1} - 2x)$

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{8x^3 + 2x^2 + 1}{2x^3 + 7x}$

9. Topologie
Zeigen Sie:
(a) $\mathbb{K}$ ist offen und abgeschlossen in $\mathbb{K}$, wobei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

(b) $\emptyset$ ist offen und abgeschlossen.

(c) $D \subset \mathbb{C}$ ist offen in $\mathbb{C} \Rightarrow D \cap \mathbb{R}$ ist offen in $\mathbb{R}$.

(d) $D \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R} \Rightarrow D$ ist abgeschlossen in $\mathbb{C}$.