Technische Universität München
Hannah Schamoni

Ferienkurs Analysis 1
Folgen, Reihen, Potenzreihen, Exponentialfunktion

Musterlösung

20.03.2012

1. Folgen I

Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz bzw. Divergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert, wobei a_n gegeben ist durch

(a) $\frac{(n+3)(2n-1)}{n^2-5}$ (b) $\left(\frac{3+4i}{4}\right)^n$ (c) $\left(\frac{3+4i}{5}\right)^n$ (d) $\left(\frac{3+4i}{6}\right)^n$ (e) $\sqrt{n^2+n}-n$

(f) $\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}$ (g) $\binom{2n}{n}2^{-n}$ (h) $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

Hinweis: Zeigen Sie bei (g) zunächst, dass $a_{n+1}=\frac{2n+1}{n+1}a_n$ und bei (h), dass $a_n=\frac{n+1}{2n}$.

Lösung:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)(2n-1)}{n^2-5}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+\frac{3}{n})(2-\frac{1}{n})}{1-\frac{5}{n^2}}=2$

(b) $|a_n|=\left|\left(\frac{3}{4}+i\right)^n\right|=\left|\frac{3}{4}+i\right|^n=\left(\sqrt{\frac{9}{16}+1}\right)^n=\left(\frac{5}{4}\right)^n>1$

Die Folge $(|a_n|)$ divergiert also; somit divergiert auch die Folge (a_n) selbst.

(c) $|a_{n+1}-a_n|=\left|\left(\frac{3+4i}{5}\right)^n\right|\left|\frac{3+4i}{5}-1\right|=\left|\frac{3}{5}+i\frac{4}{5}\right|^n\left|-\frac{2}{5}+i\frac{4}{5}\right|=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

Die Folge ist also keine Cauchy-Folge, also nicht konvergent. Sie ist divergent.

(d) $|a_n|=\left|\frac{3+4i}{6}\right|^n=\left(\frac{5}{6}\right)^n\to 0$

Damit konvergiert auch die Folge (a_n).

(e) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n}-n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=$
$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\dfrac{1}{2}$

(f) $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=$
$\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}}=1$

(g) $a_{n+1}=2^{-(n+1)}\frac{(2n+2)(2n+1)\ldots((2n+2)-(n+1)+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n+1)}=2^{-n}\frac{(n+1)(2n+1)\ldots(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n+1)}=$
$2^{-n}\frac{2n+1}{n+1}\frac{2n\ldots(n+2)(n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}=2^{-n}\binom{2n}{n}\frac{2n+1}{n+1}=a_n\frac{2n+1}{n+1}$
$\Rightarrow a_{n+1}=a_n\left(1+\frac{n}{n+1}\right)\geq a_n\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}a_n\geq\left(\frac{3}{2}\right)^2a_{n-1}\geq\ldots\geq$
$\left(\frac{3}{2}\right)^n a_1$

Da $a_1 = 1$ ist $a_{n+1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n \to \infty$.
Die Folge divergiert also.

(h) $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^n \left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} =$
$\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdots\frac{(n-2)n}{(n-1)(n-1)}\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2}\frac{n+1}{n}$ („Teleskopprodukt“)
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$

2. Folgen II

Bestimmen Sie die Grenzwerte der wie folgt definierten Folgen (a_n):

(a) $\frac{n+\sin(n^2)}{n+\cos(n)}$ (b) $\frac{\sin(n^2 \frac{\pi}{2})}{n}$ (c) $\frac{n+2\sqrt{n}}{3n-\sqrt{n}}$ (d) $n\left(1-\sqrt{1-\frac{c}{n}}\right)$

(e) $\frac{(1+i)n^4-n^3+(2+3i)n}{in^4+2n^2}$ (f) $\sqrt{n^3+n}-\sqrt{n^3-1}$

Lösung:

(a) $a_n = \frac{1+\frac{\sin(n^2)}{n}}{1+\frac{\cos(n)}{n}} \to 1$

(b) $|a_n| \leq \frac{1}{n} < \epsilon \to 0$

(c) $a_n = \frac{1+2\frac{1}{\sqrt{n}}}{3-\frac{1}{\sqrt{n}}} \to \frac{1}{3}$

(d) $a_n = n\frac{1-\left(1-\frac{c}{n}\right)}{1+\sqrt{1-\frac{c}{n}}} = \frac{c}{1+\sqrt{1-\frac{c}{n}}} \to \frac{c}{2}$

(e) $\frac{(1+i)n^4-n^3+(2+3i)n}{in^4+2n^2} = \frac{(1+i)-\frac{1}{n}+(2+3i)\frac{1}{n^3}}{i+2\frac{1}{n^2}} \to \frac{1+i}{i} = 1-i$

(f) $\sqrt{n^3+n}-\sqrt{n^3-1} = \frac{(\sqrt{n^3+n}-\sqrt{n^3-1})(\sqrt{n^3+n}+\sqrt{n^3-1})}{\sqrt{n^3+n}+\sqrt{n^3-1}} = \frac{n+1}{\sqrt{n^3+n}+\sqrt{n^3-1}} =$
$\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{n+\frac{1}{n}}+\sqrt{n-\frac{1}{n}}} \to 0$

3. Rekursive Folge

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ reeller Zahlen sei rekursiv definiert durch
$a_0 = 2$
$a_n = \frac{3}{4-a_{n-1}}$ für $n \geq 1$.
Zeigen Sie, dass die Folge konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert.

Lösung:

Es gilt: $1 < a_n < 3 \forall n \in \mathbb{N}_0$ und $a_{n-1} > a_n \forall n \in \mathbb{N}$.
Die Folge ist also streng monoton fallend und nach unten beschränkt (Beweis durch vollst. Induktion). Es existiert also ein Grenzwert a.
$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{3}{4-\lim_{n\to\infty} a_{n-1}} = \dfrac{3}{4-a}$
$\Rightarrow a^2 - 4a + 4 = 0 \Rightarrow a \in \left\{2 \pm \sqrt{4-3}\right\} = \{1, 3\}$
Da $a_0 = 2$ und da die Folge streng monoton fällt, folgt daraus $a = 1$.

4. Konvergente Folge
Sei (a_n) eine konvergente Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n =: a$ und
$s_n := \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$.
Zeigen Sie, dass damit auch $\lim_{n\to\infty} s_n = a$ gilt.

Lösung:
Sei $\epsilon > 0$. Dann folgt aus der Konvergenz von (a_n), dass es ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, so dass
$|a_i - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für $i > N$.
Für $n > \max\left\{N, \frac{2}{\epsilon}\left(\sum_{i=1}^{N} |a_i|\right)\right\}$ gilt:

$$|s_n - a| \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} |a_i| + \frac{1}{n}\sum_{i=N+1}^{n} |a_i - a| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon(n-N)}{2n} \leq \epsilon$$

5. Limes superior/inferior, Häufungspunkte
Bestimmen Sie für die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ den Limes superior, den Limes inferior und alle Häufungspunkte. Finden Sie im Fall der Konvergenz (auch uneigentliche Konvergenz) den Grenzwert.
(a) $a_n := (-1)^n \frac{n-1}{n+1}$ (b) $a_n := (-3)^n + ((-1)^n + 1)5^n$ (c) $a_n := \sqrt[n]{3^n + ((-1)^n + 1)5^n}$

Lösung:
(a) $a_{2n} = (-1)^{2n}\frac{2n-1}{2n+1} = \frac{1-\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{2n}} \to 1$ und $a_{2n+1} = -\frac{1-\frac{1}{2n+1}}{1+\frac{1}{2n+1}} \to -1$
1 und -1 sind Grenzwerte von Teilfolgen von (a_n) und damit Häufungspunkte. Es gibt keine weiteren Häufungspunkte, da jede weitere konvergente Teilfolge unendlich viele gerade oder ungerade Indizes hat und somit gegen 1 oder -1 konvergiert.
Da 1 größter Häufungspunkt ist, gilt $\limsup a_n = 1$; analog ist $\liminf a_n = -1$.
Da (a_n) zwei Häufungspunkte hat, ist die Folge nicht konvergent.

(b) $a_{2n} = (-3)^{2n} + ((-1)^{2n} + 1)5^{2n} = 3^{2n} + 2 \cdot 5^{2n} \to \infty$ und $a_{2n+1} = -3^{2n+1} \to -\infty$
Analog zu (a) gibt es keine weiteren Häufungspunkte und es gilt $\limsup a_n = \infty$ bzw. $\liminf a_n = -\infty$; die Folge ist also nicht konvergent.

(c) Es gilt: $5 = \sqrt[n]{5^n} < \sqrt[n]{3^n + 2 \cdot 5^n} < \sqrt[n]{5^n + 2 \cdot 5^n} = 5\sqrt[n]{3} \to 5$
$a_{2n} = \sqrt[2n]{3^{2n} + 2 \cdot 5^{2n}} \to 5$ und $a_{2n+1} = \sqrt[n]{3^n} = 3$.
3 und 5 sind Häufungspunkte von (a_n). Es gibt analog zu (a) und (b) keine weiteren.
Also ist $\limsup a_n = 5$ und $\liminf a_n = 3$. Die Folge ist nicht konvergent.

6. Aussagen über Folgen

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie: $\limsup a_n = \infty \Leftrightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht nach oben beschränkt.

Lösung:

„$\Rightarrow$“ $\limsup a_n = \infty$ heißt, dass es für alle $c \in \mathbb{R}$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $a_n > c$; (a_n) ist also nach oben nicht beschränkt.

“$\Leftarrow$“ Sei $c \in \mathbb{R}$. Gäbe es nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n > c$, z.B. $n_1, \ldots, n_m$, dann wäre $b := \max\{c, a_{n_1}, \ldots, a_{n_m}\}$ eine obere Schranke für (a_n), Widerspruch zur Voraussetzung!
Also gibt es zu jedem $c \in \mathbb{R}$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n > c$, also $\limsup a_n = \infty$.

7. Konvergenz von Reihen

Untersuchen Sie folgende Reihen auf (absolute) Konvergenz bzw. Divergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(\sqrt{n})}{n^{\frac{5}{2}}}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-1}}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$

Hinweis zu (e): Archimedisches Axiom: $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > x$

Lösung: (a) $a_n := \frac{n^4}{3^n} \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^4}{3^{n+1}} \frac{3^n}{n^4} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^4 \to \frac{1}{3} < 1$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe also absolut.

(b) Sei $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Die Folge (b_n) ist eine monoton fallende Nullfolge. Nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert die Reihe also.

(c) $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Daraus folgt:
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{\sin(\sqrt{n})}{n^{\frac{5}{2}}}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$. Da $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ konvergiert, konvergiert nach dem Majorantenkriterium auch die gegebene Reihe absolut.

(d) Die Reihe divergiert, da eine divergente Minorante existiert: $\frac{1}{\sqrt{n-1}} > \frac{1}{n-1} > \frac{1}{n}$

(e) Nach dem Archimedischen Axiom existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $n_0 \geq |x|$. Für alle $n \geq n_0$ gilt dann:

$$\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!} x^{2n+2}}{\frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}}\right| = \left|\frac{-x^2}{(2n+1)(2n+2)}\right| \leq \frac{|x^2|}{4n^2} \leq \frac{|x^2|}{4n_0^2} \leq \frac{1}{4} < 1$$

Daraus folgt mit dem Quotientenkriterium die absolute Konvergenz für alle $x \in \mathbb{R}$.

8. Werte von Reihen

Bestimmen Sie die Werte der angegebenen Reihen.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{4^n}$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{4^n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$

Lösung:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{2^{2n}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n =$
$\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{4^n} = 3\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1\right) = 3\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1\right) = 3$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{4}\right)^n = \ldots (analog\ zu\ a) = \frac{4}{7}$

(d) Zuerst betrachtet man $\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{-\frac{1}{2}}{2n+1} + \frac{\frac{1}{2}}{2n-1}$.
Damit ist die n-te Partialsumme (Teleskopsumme):
$s_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \pm \ldots - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \to \frac{1}{2}$

9. Konvergenzradien von Potenzreihen

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}(n^4-4n^3)x^n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^n+e^{-n}}{2}x^n$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{5n+1}}{1+2^n}$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2+(-1)^n)^n}{n}x^n$

Lösung:

(a) $\sum(n^4-4n^3)x^n = \sum a_n x^n$

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|n^4-4n^3|}}$$
$$= \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^4\sqrt[n]{|1-4/n|}} = 1$$

(b) $\sum\frac{e^n+e^{-n}}{2}x^n = \sum a_n x^n$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{e^n+e^{-n}}{2}\frac{2}{e^{n+1}+e^{-(n+1)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+e^{-2n}}{e+e^{-(2n+1)}} = \frac{1}{e}$$

(c) Nach dem Wurzelkriterium muss gelten:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x^{5n+1}|}{1+2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x^{5+\frac{1}{n}}|}{\sqrt[n]{1+2^n}} = \frac{|x|^5}{2} \overset{!}{<} 1 \Rightarrow R = \sqrt[5]{2}$$

(d) $$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2+(-1)^n)^n}{n}}} = \frac{1}{\limsup\frac{2+(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}} = \frac{1}{3}$$

Hier ist es wichtig, tatsächlich den Limes superior zu bilden, da kein eindeutiger Grenzwert existiert, sondern nur Häufungspunkte.

10. Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

Beweisen Sie für $z, w \in \mathbb{C}$ mit Hilfe des Cauchy-Produkts:
$\exp(z)\exp(w) = \exp(z+w)$

Lösung:

Die Exponentialreihe ist absolut konvergent, weshalb das Cauchy-Produkt angewandt werden kann.

$$\exp(z)\exp(w) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n = \exp(z+w)$$

11. Sinus, Cosinus

Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
(a) $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$
(b) $\sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$

Lösung:

(a) $\cos(3x) = \cos(2x + x) = \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) =$
$[\cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x)]\cos(x) - [\sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x)]\sin(x) =$
$\cos^3(x) - 3\sin^2(x)\cos(x) = \cos^3(x) - 3(1 - \cos^2(x))\cos(x) =$
$4\cos^3(x) - 3\cos(x)$

(b) $\sin(3x) = \sin(2x + x) =$
$[\sin(x)\cos(x) + \sin(x)\cos(x)]\cos(x) + [\cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x)]\sin(x) =$
$-\sin^3(x) + 3\sin(x)\cos^2(x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$