Andreas Wörfel
Aufgaben Montag

Ferienkurs Analysis 1 für Physiker
WS 2011/12

Aufgabe 1 *'Ne Menge Mengen*

a) Zeigen Sie: $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

Lösung:

„$\Rightarrow$" Zeige: $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$

$$\left.\begin{aligned} x \in (A \cup B) \Rightarrow x \in A \subseteq B \vee x \in B, \text{ also: } (A \cup B) \subseteq B \\ x \in B \Rightarrow x \in (A \cup B), \text{ also: } B \subseteq (A \cup B) \end{aligned}\right\} \Rightarrow A \cup B = B$$

„$\Leftarrow$" Zeige: $A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$

$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B = B$ Also ist jedes Element von A in B, also ist $A \subseteq B$

Wir haben beide Richtungen der Implikation gezeigt. Daraus folgt die Behauptung.

b) Zeigen Sie die de Morganschen Regeln:
$X \backslash (A \cup B) = (X \backslash A) \cap (X \backslash B)$
$X \backslash (A \cap B) = (X \backslash A) \cup (X \backslash B)$

Lösung:

$$\begin{aligned} x \in X \backslash (A \cup B) &\iff x \in X \wedge x \notin (A \cup B) \\ &\iff x \in X \wedge (x \notin A \wedge X \notin B) \\ &\iff (x \in X \wedge x \notin A) \wedge (x \in X \wedge x \notin B) \\ &\iff x \in (X \backslash A) \cap (X \backslash B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in X \backslash (A \cap B) &\iff x \in X \wedge x \notin (A \cap B) \\ &\iff x \in X \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \\ &\iff (x \in X \wedge x \notin A) \vee (x \in X \wedge x \notin B) \\ &\iff x \in (X \backslash A) \cup (X \backslash B) \end{aligned}$$

Aufgabe 2 *Kompositionen und direkte Beweise*

Seien A, B, C Mengen und $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen.

a) Zeigen Sie: Ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch f injektiv.

Lösung:

Es ist zu zeigen, dass $f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$ gilt.
Wir wissen bereits nach Voraussetzung, dass $g(f(a)) = g(f(a')) \Rightarrow a = a'$
Wende also g auf $f(a) = f(a')$ an. Wir erhalten $g(f(a)) = g(f(a'))$ und hierfür wissen wir bereits: $a = a'$

b) Zeigen Sie: Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist auch g surjektiv.

Lösung:

Es ist zu zeigen, dass $\forall c \in C \exists b \in B : g(b) = c$
Wir wissen bereits für $g \circ f$: $\forall c \in C \exists a \in A : g(f(a)) = c$
Und damit: $\forall c \in C \exists f(a) \in B : g(f(a)) = c$

c) Geben Sie ein Beispiel (mit Begründung) an, in dem $g \circ f$ bijektiv, aber weder g injektiv noch f surjektiv ist.

Lösung:

$A = B = C = \mathbb{Z}$
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : m \mapsto 2m$
$$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : k \mapsto \begin{cases} k/2 & \text{falls k gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
Nun sei $g(f(m)) = g(f(n))$, also: $g(2m) = g(2n) \Rightarrow m = n$. Deswegen ist $g \circ f$ injektiv.
$\forall m \in \mathbb{Z} : g(f(m)) = g(2m) = m$, also ist $g \circ f$ surjektiv.
$\Rightarrow g \circ f$ bijektiv
Aber f ist nicht surjektiv, da z.B. 3 kein Urbild hat, und g nicht injektiv, da z.B. $g(1) = g(3) = 0$

Aufgabe 3 *Gruppen*

Gegeben ist die Gruppe $G = \{a, b, c, x, y, z\}$ mit einer Verknüpfung $\times$. Über die Verknüpfungstafel von G sei bekannt:

×	a	b	c	x	y	z
a					c	b
b		x	z			
c		y				
x				x		
y						
z		a			x	

Die Tabelle ist so zu lesen: Zeile × Spalte = Eintrag. Bestimmen Sie die restlichen Felder mit Hilfe der Gruppenaxiome.

Lösung:

×	a	b	c	x	y	z
a	11	8	12	1	c	b
b	14	x	z	1	3	14
c	6	y	7	1	4	3
x	1	1	1	x	1	1
y	10	8	9	1	5	2
z	14	a	13	1	x	14

(a) Reihenfolge der Einträge

×	a	b	c	x	y	z
a	x	z	y	a	c	b
b	y	x	z	b	a	c
c	z	y	x	c	b	a
x	a	b	c	x	y	z
y	b	c	a	y	z	x
z	c	a	b	z	x	y

(b) Fertige Tabelle

1. Offensichtlich ist x das Neutrale, somit lassen sich die Spalte und Zeile mit x gleich ausfüllen.
2. y und z sind invers zueinander
3. $a \times y = c \Rightarrow a \times y \times z = c \times z = a$ und $a \times z = b \Rightarrow a \times z \times y = b \times y = a$
4. $b \times c = z \Rightarrow b \times (c \times y) = z \times y = x \Rightarrow (c \times y) = b$
5. Abgeschlossenheit: jedes Element muss in jeder Zeile genau 1 mal auftauchen

Den Rest kann man zunächst nach dem Sudoku-Prinzip füllen:

6. z muss in Zeile 3, aber in Spalte 3 steht schon eines
7. Abgeschlossenheit: jedes Element muss in jeder Zeile genau 1 mal auftauchen
8. z muss in Spalte 2, jedoch in Zeile 5 ist schon eines, analog: c muss in Spalte 2, jedoch in Zeile 1 ist bereits eines
9. a muss in Zeile 5, aber in Spalte 1 ist schon eines. 10. Abgeschlossenheit: jedes Element muss in jeder Zeile genau 1 mal auftauchen
11. x muss in Zeile 1, jedoch in der 3. Spalte ist schon eines
12., 13. Abgeschlossenheit: jedes Element muss in jeder Zeile genau 1 mal auftauchen

Nun haben wir noch 4 Felder frei, die mit c und y zu befüllen sind. Die Sudoku-Variante kann uns hier nicht helfen, wir können uns jedoch der Assoziativiät bedienen, bspw. so:

14. $z \times z = (c \times a) \times (c \times a) = c \times (a \times c) \times a = c \times (y \times a) = c \times b = y$
Die anderen Felder ergeben sich entweder analog, oder wieder mit dem Sudoku-Prinzip.

Aufgabe 4 *Körper*

Geben Sie den kleinsten Körper an, den man konstruieren kann. Es werden also sowohl die Elemente als auch die zwei Operationen gesucht.
Hinweis: Überlegen Sie sich, welche Elemente Sie unbedingt brauchen und auf was Sie verzichten können. Wenn Sie diese haben, können Sie sich leicht Operationen (mit den geforderten Eigenschaften) überlegen, mit denen Sie keine neuen Elemente erzeugen, sondern sich innerhalb der Elemente bewegen, die Sie schon haben.

Lösung:

Wir brauchen unbedingt die Neutralen. Wir nennen diese 0 und 1. Die Neutralen haben die Eigenschaft, dass sie selbstinvers sind, das heißt, wir brauchen keine neuen Inversen suchen. Weitere Elemente sind überflüssig.
Nun zu den Operationen. Wir können hier die „normale“ Multiplikation verwenden, es ist aber üblich die Modulo-2-Multiplikation zu nehmen, da in allen anderen sog. Primkörpern $\mathbb{Z}_p$ (mit p Primzahl) bei $p > 2$ nur noch die Modulo-p-Multiplikation die Abgeschlossenheit gewährleistet.
Bei der Addition bleibt uns nur die Modulo-2-Addition.
Gesucht war also: $(\mathbb{Z}_2, \oplus_2, \otimes_2)$

$\otimes_2$	0	1
0	0	0
1	0	1

(a) Mod-2-Multiplikation

$\oplus_2$	0	1
0	0	1
1	1	0

(b) Mod-2-Addition

Abbildung 1: Logische Tabellen

Aufgabe 5 *Äquivalenz*

Zeigen Sie: Genau dann wenn x gerade ist, so ist auch x^2 gerade.
Hinweis: Es ist günstig, direkten und indirekten Beweis zu verwenden.

Lösung:

1. x gerade $\Rightarrow x^2$ gerade
Direkt: x hat Darstellung der Form $x = 2n$
$x^2 = (2n)^2 = 2 \cdot 2n^2$, dies ist eine gerade Zahl

2. x gerade $\Leftarrow x^2$ gerade
Indirekt: Zeige: x nicht gerade $\Rightarrow x^2$ nicht gerade.
x hat Darstellung der Form $x = 2n + 1$
$x^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$, dies ist eine ungerade Zahl

Aufgabe 6 *Induktionsbeweis*

Zeigen Sie $\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$ per Induktion.

Lösung:

IA: $\sum_{k=0}^{0}(2k+1) = 1 = (1+0)^2$
IV: gelte $\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$ bereits bis n
IS: $\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1) = \sum_{k=0}^{n}(2k+1) + (2(n+1)+1) \stackrel{IV}{=} (n+1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$

Aufgabe 7 *Direkter Beweis*

Zeigen Sie: Ist die Quersumme einer Zahl durch 3 teilbar, so ist die Zahl selbst durch 3 teilbar.
Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst eine geeignete Darstellung einer Zahl und teilen Sie diese dann geschickt auf.

Lösung:

Wir können eine Zahl a folgendermaßen darstellen:
$a = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^k = 9 \cdot \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \underbrace{11\ldots1}_{\text{k Einsen}} + \sum_{k=0}^{n} a_k$
Hier sehen wir sofort: Der erste Summand ist immer durch 3 teilbar, der zweite Summand stellt die Quersumme dar. Also ist die Zahl a genau dann durch 3 teilbar, wenn die Quersumme durch 3 teilbar ist.

Aufgabe 8 *Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$*

Finden Sie ein Diagonalargument, mit dem Sie zeigen können, dass $\mathbb{R}$ überabzählbar ist.
Hinweis: Nehmen Sie eine dezimale Darstellung der Zahlen, es reicht Zahlen zwischen 0 und 1 zu betrachten. Sie müssen diese so anordnen, dass Sie bei entsprechender Abzählung immer eine Zahl „vergessen" zu zählen.

Lösung:

Wir nehmen beliebige Zahlen und ordnen sie z.B. in ab- oder aufsteigender Reihenfolge an.
Dann ersetzen wir bei der i-ten Zahl die i-te Stelle z.B. immer durch eine 5, es sei denn, sie ist schon eine 5, dann nehmen wir eine 6.
$0,\mathbf{1}53741...$ $\Rightarrow 0,5...$
$0,1\mathbf{5}3742...$ $\Rightarrow 0,56...$
$0,15\mathbf{3}744...$ $\Rightarrow 0,565...$
$0,153\mathbf{7}47...$ $\Rightarrow 0,5655...$
$0,1537\mathbf{4}9...$ $\Rightarrow 0,56555...$
...

Wenn wir dies für genügend Zahlen gemacht haben, werden wir fesstellen, dass wir die Zahl auf der rechten Seite noch nicht gehabt (also vergessen) haben. Wenn wir die so gefundene Zahl wieder an die Liste anhängen, müssen wir wieder den Algorithmus anwenden und erhalten wieder eine neue Zahl. Schließlich haben wir diese gerade immer so konstruiert, dass sie sich immer von der auf der linken Seite unterscheidet.
Die Crux liegt in diesem Argument also nicht so sehr darin, dass es unendlich viele Zahlen gibt, sondern viel mehr dass die Zahlen unendlich viele Nachkommastellen haben und wir mit jeder neuen Zahl, die wir an die Liste anhängen, die Zahl der relevanten Nachkommastellen erhöhen. Dies können wir nun beliebig lange fortführen, am Schluss bleibt immer eine Zahl übrig, die noch fehlt. Also ist $\mathbb{R}$ überabzählbar.

Anmerkung: Hiermit lässt sich kein Gegenbeweis zur Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ konstruieren, wie man zunächst vermuten könnte. Bei Zahlen aus $\mathbb{Q}$ haben wir das „Glück", dass die Zahl der Nachkommastellen entweder endlich ist oder die Nachkommastellen selbst ab einer gewissen Stelle periodisch sind. Im ersten Fall haben wir kein Problem - da können wir diese hinschreiben und zählen - und in letzterem Falle erhalten wir durch das Shiften der ganzen Stellen am Schluss eine nicht-periodische Zahl mit unendlich vielen Nachkommastellen, die jedoch nicht mehr in $\mathbb{Q}$ sondern in $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ liegt. Also hätten wir keine Zahl vergessen zählen.

Aufgabe 9 *Binomialkoeffizienten*

a) Zeigen Sie durch Umformung:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} \cdot \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right) \\ &= \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{n+1}{k(n-k+1)} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}\end{aligned}$$

b) Beweisen Sie den binomischen Satz:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Lösung:

Vollständige Induktion:
IA: $n = 0:$

$$(x+y)^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^k y^{-k}$$

IV: Gelte $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ bereits für n.
IS: $n \to n+1:$

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \overset{IV}{=} (x+y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\ &= x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + y \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1}\end{aligned}$$

Nun wollen wir Aufgabenteil a verwenden, da kommen „heavy Index-Schubsing" (wie Prof. Hoffmann sagen würde) leider nicht rum.

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} && \text{Wir erhöhen den Index in der 1. Summe um 1.} \\ &= x^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} + y^{n+1} && \text{Wir ziehen je 1 Summanden aus jeder Summe.} \\ &= y^{n+1} + x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] x^k y^{n-k+1} \\ &\overset{a}{=} \binom{n+1}{0} x^0 y^{(n+1)-0} + \binom{n+1}{n+1} x^{(n+1)} y^{(n+1)-(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k y^{n-k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n-k+1} && \text{Wir fügen das 0te und (n+1)te Glied in die Summe ein.}\end{aligned}$$