Aufgabe 1 *'Ne Menge Mengen*

a) Zeigen Sie: $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

b) Zeigen Sie die de Morganschen Regeln:
$X \backslash (A \cup B) = (X \backslash A) \cap (X \backslash B)$
$X \backslash (A \cap B) = (X \backslash A) \cup (X \backslash B)$

Aufgabe 2 *Kompositionen und direkte Beweise*

Seien A, B, C Mengen und $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen.

a) Zeigen Sie: Ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch f injektiv.

b) Zeigen Sie: Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist auch g surjektiv.

c) Geben Sie ein Beispiel (mit Begründung) an, in dem $g \circ f$ bijektiv, aber weder g injektiv noch f surjektiv ist.

Aufgabe 3 *Gruppen*

Gegeben ist die Gruppe $G = \{a, b, c, x, y, z\}$ mit einer Verknüpfung $\times$. Über die Verknüpfungstafel von G sei bekannt:

×	a	b	c	x	y	z
a					c	b
b		x	z			
c		y				
x				x		
y						
z		a			x	

Die Tabelle ist so zu lesen: Zeile × Spalte = Eintrag. Bestimmen Sie die restlichen Felder mit Hilfe der Gruppenaxiome.

Aufgabe 4 *Induktionsbeweis*

Zeigen Sie $\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2$ per Induktion.

Aufgabe 5 *Körper*

Geben Sie den kleinsten Körper an, den man konstruieren kann. Es werden also sowohl die Elemente als auch die zwei Operationen gesucht.
Hinweis: Überlegen Sie sich, welche Elemente Sie unbedingt brauchen und auf was Sie verzichten können. Wenn Sie diese haben, können Sie sich leicht Operationen (mit den geforderten Eigenschaften) überlegen, mit denen Sie keine neuen Elemente erzeugen, sondern sich innerhalb der Elemente bewegen, die Sie schon haben.

Aufgabe 6 *Äquivalenz*

Zeigen Sie: Genau dann wenn x gerade ist, so ist auch x^2 gerade.
Hinweis: Es ist günstig, direkten und indirekten Beweis zu verwenden.

Aufgabe 7 *Direkter Beweis*

Zeigen Sie: Ist die Quersumme einer Zahl durch 3 teilbar, so ist die Zahl selbst durch 3 teilbar.
Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst eine geeignete Darstellung einer Zahl und teilen Sie diese dann geschickt auf.

Aufgabe 8 *Überabzählbarkeit von* $\mathbb{R}$

Finden Sie ein Diagonalargument, mit dem Sie zeigen können, dass $\mathbb{R}$ überabzählbar ist.
Hinweis: Nehmen Sie eine dezimale Darstellung der Zahlen, es reicht Zahlen zwischen 0 und 1 zu betrachten. Sie müssen diese so anordnen, dass Sie bei entsprechender Abzählung immer eine Zahl „vergessen" zu zählen.

Aufgabe 9 *Binomialkoeffizienten*

a) Zeigen Sie durch Umformung:
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

b) Beweisen Sie den binomischen Satz:
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$