Technische Universität München

Department of Physics

Ferienkurs zur Linearen Algebra
Bilinearformen, Euklidische Vektorräume
und Endomorphismen
Musterlösungen zu den Übungen

Freitag, 16.03.2012

Sascha Frölich

Aufgabe 1
Finden Sie eine orthogonale Bilinearform, für deren quadratische Form gilt:
(a) $q_\varphi(u) = 4x^2 + 9xy - 8y^2$, $u = {}^t(x, y)$
Finden Sie eine symmetrische Bilinearform, für deren quadratische Form gilt:
(b) $q_\varphi(v) = 3x^2 + 4xy - y^2 + 8xz - 2yz + z^2$, $v = {}^t(x, y)$

Lösung 1
(a) $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2
Es seien $u = {}^t(x_1, x_2)$ und $v = {}^t(y_1, y_2)$ Welche der folgenden Abbildungen sind Bilinearformen? Sind sie ggf. symmetrisch oder orthogonal?

(a) $\varphi(u, v) = x_1y_1 + 2x_2y_1 + 2x_1y_2 + 6x_2y_2$
(b) $\varphi(u, v) = 6x_1y_1 + y_1y_2$
(c) $\varphi(u, v) = x_1y_1 + 3x_2y_1 + x_2y_2 - 3x_1y_2$
(d) $(u, v) \mapsto \varphi(u, v)$ mit $2(u, v) \mapsto \varphi(u, 2v) = \varphi(2u, v)$, $(u, v) + (v, z) \mapsto \varphi(u + z, v) \forall z \in \mathbb{R}^2$

Lösung 2
(a) ist symmetrische Bilinearform mit der Abbildungsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

(b) ist keine Bilinearform, da $\varphi(2u, v) = 12x_1y_1 + y_1y_2 \neq 2\varphi(u, v)$
(c) ist orthogonale Bilinearform mit der Abbildungsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(d) Nein. Die Definition einer Bilinearform ist u.a. $\varphi(u, v) + \varphi(u, z) = \varphi(u, v + z)$. Das geht andersherum nicht für alle z.

Aufgabe 3
Die Bilinearform $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ sei bzgl. der Standardbasis durch folgende Matrix gegeben:

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Ist φ ausgeartet?
(b) Berechnen Sie die Menge $D^\perp = \left\{ v \in \mathbb{R}^4 | \varphi(v, x) = 0, \forall x \in D \right\}$

$$\text{für } D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Lösung 3
(a) $det(M) = -1 \Rightarrow \varphi$ ist nicht ausgeartet.
(b) Mit $x = (a, b, c, d)$:

$$^t x \cdot M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt schnell: $a = -d$. Weiter:

$$^t x \cdot M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt: $a + 3b + 2c + 2d \overset{a=-d}{=} d = -3b - 2c = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b+2c \\ b \\ c \\ -3b-2c \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = D^{\perp}$$

Aufgabe 4
(a) Ist $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = -x_1 y_2 + x_2 y_1$ symmetrisch?
(b) Ist $g((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 - x_2 y_2$ symmetrisch?
(c) Welche der folgenden Matrizen definiert ein Skalarprodukt?

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Mit dem Skalarprodukt aus Teilaufgabe (c): In welchem Winkel stehen folgende Vektoren aufeinander:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung 4
(a) Nein: $f((y_1, y_2), (x_1, x_2)) = -y_1 x_2 + y_2 x_1 \neq f((x_1, x_2), (y_1, y_2))$
(b) Ja: $g((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = g((y_1, y_2), (x_1, x_2))$
(c) A ist das Skalarprodukt da sie *symmetrisch* und *positiv definit* ist. B ist nicht symmetrisch und C ist nicht positiv definit ($(0, 0, -1) \mapsto -3$).
(d) $a \perp b$, $\sphericalangle(a, c) = 84,78°$, $\sphericalangle(b, c)7,75°$. Man beachte, dass auch die Norm über das neue Skalarprodukt ausgerechnet werden muss.

Aufgabe 5
Auf $V = \mathbb{R}^2$ seien die Bilinearformen $f_A \colon (x, y) \mapsto {}^t xAy$ und $f_B \colon (x, y) \mapsto {}^t xBy$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen und skizzieren Sie $X_A := \{x \in V | f_A(x,x) = 0\}$ und $X_B := \{x \in V | f_B(x,x) = 0\}$

Lösung 5
X_A sind die beiden Winkelhalbierenden des $\mathbb{R}^2$
X_B sind die kanonischen Basisvektoren von $\mathbb{R}^2$

Aufgabe 6
Untersuchen Sie die folgenden Matrizen auf Definitheit:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung 6
A: indefinit (Eigenwerte größer und kleiner null)
B: Die Matrix B ist indefinit. Mit ${}^t(0,1,1) \mapsto 2$, jedoch mit ${}^t(0,-1,1) \mapsto -2$.
C: Die Matrix C ist indefinit. Das Hurwitzkriterium über die ersten beiden Unterdeterminanten sagt, dass die Matrix weder positiv noch negativ definit sein kann. Mit ${}^t(0,1,1) \mapsto -1$, jedoch mit ${}^t(0,1,-1) \mapsto 7$

Aufgabe 7
Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix hat drei Eigenwerte. Zwei von ihnen sind: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$. Wieso ist die Matrix orthogonal diagonalisierbar? Berechnen Sie die Transformationsmatrix.

Lösung 7
Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist orthogonal diagonalisierbar, wenn Sie n Weigenwerte in $\mathbb{R}$ hat. Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat immer n Eigenwerte in $\mathbb{R}$. Demnach ist die obenstehende Matrix orthogonal diagonalisierbar.
Der zu 2 gehörige Eigenraum ist: ${}^t(-1,0,1) \cdot \mathbb{R}$. Zu -2 gehört der Eigenraum ${}^t(-1,1,-1) \cdot \mathbb{R}$. Auf diesen beiden ER muss der dritte senkrecht stehen (wobei schon die ersten beiden zueinander senkrecht stehen). Mit dem Kreuzprodukt errechnet man den dritten ER: ${}^t(1,2,1) \cdot \mathbb{R}$. Normiert folgt:

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, T^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Und

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8
Sind die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

kongruent? Wieso?

Lösung 8
Ja. Mit $A \overset{Z_1 \leftarrow Z_1 + Z_2, S_1 \leftarrow S_1 + S_2}{\rightsquigarrow} B$ erhält man $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ wobei $B = SA^tS$

Aufgabe 9
(a) Berechnen Sie die Projektion von b auf a:
$a = {}^t(2,2,1)$, $b = {}^t(3,2,3)$
(b) Es seien die drei Vektoren gegeben:

$$d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ e = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich liegt f in der von d und e aufgespannten Ebene. Berechnen Sie (oder argumentieren Sie) $f^{\|}$ bzgl dieser Ebene.
(c) $g = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist eine Linearkombination von a und b und liegt folglich in der von a und b aufgespannten Ebene. Wieso ist

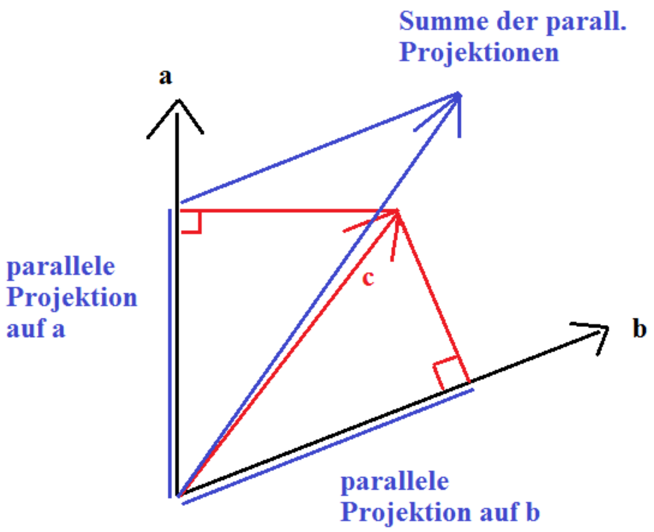
$$\tfrac{\langle a|g\rangle}{\|a\|^2}a + \tfrac{\langle b|g\rangle}{\|b\|^2}b \neq g?$$

Machen Sie sich das anhand eines graphischen Beispiels im $\mathbb{R}^2$ klar.

Lösung 9
(a) Mit Gram-Schmidt folgt: $b_a^{\|} = \frac{13}{9} \cdot {}^t(2,2,1) \;\Rightarrow\; b_a^{\perp} = b - b_a^{\|} = {}^t(\frac{1}{9}, -\frac{8}{9}, \frac{14}{9})$
(b) Es lässt sich zeichnerisch (oder auch rechnerisch mit Gram Schmidt) schnell zeigen, dass:

$$f^{\|} = f$$

(c) Dies ist (im Gegensatz zu Teilaufgabe c) so, weil a und b nicht orthogonal aufeinander stehen. Paint machts möglich:



Aufgabe 10
(a) Es seien

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right), A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Bilinearform $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei bezüglich der Basis B durch die Matrix A gegeben Bestimmen Sie f(u,v). u und v sind natürlich bzgl. der kanonischen Basis gegeben.

Lösung 10
Im Folgenden ist E^3 die Standardbasis in $\mathbb{R}^3$. Es ist also f gegeben als

$$f(x, y) = {}^t(x_{/B}) \cdot A \cdot y_{/B}$$

wir suchen

$$f(u, v) = {}^t(u_{/E}) \cdot \underbrace{{}^t({}_B[id_{\mathbb{R}^3}]_E) \cdot A \cdot ({}_B[id_{\mathbb{R}^3}]_E)}_{{}_E[f]_E} \cdot v_{/E}$$

$${}_E[id_{\mathbb{R}^3}]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: T$$

wobei die Spalten von T den Basisvektoren in B entsprechen. Man berechnet

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = {}_B[id_{\mathbb{R}^3}]_E, \text{ und damit } {}_E[f]_E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & 6 \\ 5 & 6 & -17 \end{pmatrix}$$

also insgesamt

$$f(u, v) = {}^t u_E [f]_E v = -18$$