Technische Universität München

Department of Physics

Ferienkurs zur Linearen Algebra

Bilinearformen, Euklidische Vektorräume und Endomorphismen

Musterlösungen zu den Aufgaben

Freitag, 16.03.2012

Sascha Frölich

Aufgabe 1
Finden Sie eine orthogonale Bilinearform, für deren quadratische Form gilt:
(a) $q_\varphi(u) = 4x^2 + 9xy - 8y^2$, $u = {}^t(x, y)$
Finden Sie eine symmetrische Bilinearform, für deren quadratische Form gilt:
(b) $q_\varphi(v) = 3x^2 + 4xy - y^2 + 8xz - 2yz + z^2$, $v = {}^t(x, y)$

Aufgabe 2
Es seien $u = {}^t(x_1, x_2)$ und $v = {}^t(y_1, y_2)$ Welche der folgenden Abbildungen sind Bilinearformen? Sind sie ggf. symmetrisch oder orthogonal?

(a) $\varphi(u, v) = x_1y_1 + 2x_2y_1 + 2x_1y_2 + 6x_2y_2$
(b) $\varphi(u, v) = 6x_1y_1 + y_1y_2$
(c) $\varphi(u, v) = x_1y_1 + 3x_2y_1 + x_2y_2 - 3x_1y_2$
(d) $(u, v) \mapsto \varphi(u, v)$ mit $2(u, v) \mapsto \varphi(u, 2v) = \varphi(2u, v)$, $(u, v) + (v, z) \mapsto \varphi(u + z, v) \forall z \in \mathbb{R}^2$

Aufgabe 3
Die Bilinearform $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ sei bzgl. der Standardbasis durch folgende Matrix gegeben:

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Ist φ ausgeartet?
(b) Berechnen Sie die Menge $D^\perp = \left\{v \in \mathbb{R}^4 | \varphi(v, x) = 0, \forall x \in D\right\}$

$$\text{für } D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 4
(a) Ist $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = -x_1y_2 + x_2y_1$ symmetrisch?
(b) Ist $g((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - x_2y_2$ symmetrisch?
(c) Welche der folgenden Matrizen definiert ein Skalarprodukt?

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Mit dem Skalarprodukt aus Teilaufgabe (c): In welchem Winkel stehen folgende Vektoren aufeinander:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5
Auf $V = \mathbb{R}^2$ seien die Bilinearformen $f_A\colon (x,y) \mapsto {}^t x A y$ und $f_B\colon (x,y) \mapsto {}^t x B y$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen und skizzieren Sie $X_A := \{x \in V | f_A(x,x) = 0\}$ und $X_B := \{x \in V | f_B(x,x) = 0\}$

Aufgabe 6
Untersuchen Sie die folgenden Matrizen auf Definitheit:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7
Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix hat drei Eigenwerte. Zwei von ihnen sind: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$. Wieso ist die Matrix orthogonal diagonalisierbar? Berechnen Sie die Transformationsmatrix.

Aufgabe 8
Sind die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

kongruent? Wieso?

Aufgabe 9
(a) Berechnen Sie die Projektion von b auf a.
$a = {}^t(2,2,1)$, $b = {}^t(3,2,3)$
(b) Es seien die drei Vektoren gegeben:

$$d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich liegt f in der von d und e aufgespannten Ebene. Berechnen Sie (oder argumentieren Sie) $f^{\|}$ bzgl. dieser Ebene.
(c) $g = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist eine Linearkombination von a und b und liegt folglich in der von a und b aufgespannten Ebene. Wieso ist

$$\frac{\langle a|g\rangle}{\|a\|^2}a + \frac{\langle g|c\rangle}{\|b\|^2}b \neq g?$$

Machen Sie sich das anhand eines graphischen Beispiels im $\mathbb{R}^2$ klar.

Aufgabe 10
(a) Es seien

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right), A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Bilinearform $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei bezüglich der Basis B durch die Matrix A gegeben Bestimmen Sie f(u,v). u und v sind natürlich bzgl. der kanonischen Basis gegeben.