TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

FLORIAN ETTLINGER — FERIENKURS LINEARE ALGEBRA

ÜBUNG DONNERSTAG — WS 2011/12

Aufgabe 1 Man zeige:

a) Ein nilpotenter Endomorphismus hat nur die Null als Eigenwert.
Hinweis: Ein Endomorphismus F heisst *nilpotent*, wenn es ein k gibt, so dass $F^k = 0$.

LÖSUNG:

$$F(v) = \lambda v \;\Rightarrow\; F^2(v) = \lambda^2 v \;\Rightarrow\; \ldots \;\Rightarrow\; F^k(v) = \lambda^k v \;\Rightarrow\; \vec{0} = \lambda^k v \;\Rightarrow\; \lambda = 0$$

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine symmetrische Matrix. Die Eigenwerte von A sind reell.

LÖSUNG:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$\chi_A(X) = (a - X)(c - X) = X^2 - (a + c)X + ac - b^2$$

$$\lambda_\pm = \frac{a+c}{2} \pm \sqrt{\frac{(a-c)^2}{4} + b^2} \in \mathbb{R}$$

c) Zwei ähnliche Matrizen haben das selbe charakteristische Polynom.
Hinweis: Zwei Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ heissen zueinander *ähnlich*, wenn es eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ gibt, so dass $B = SAS^{-1}$.

LÖSUNG:

$$\begin{aligned}
\chi_B &= \det(B - \lambda E_n) \\
&= \det(SAS^{-1} - \lambda SS^{-1}) \\
&= \det S \cdot \det S^{-1} \cdot \det(A - \lambda E_n) \\
&= \det S \cdot (\det S)^{-1} \cdot \det(A - \lambda E_n) \\
&= \det(A - \lambda E_n) = \chi_A
\end{aligned}$$

d) Für eine Matrix $A \in \mathrm{GL}(n, K)$ gilt $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

LÖSUNG:

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det E_n = 1 \;\Rightarrow\; \det A \cdot \det A^{-1} = 1 \;\Rightarrow\; \det A^{-1} = (\det A)^{-1}$$

e) Sei A diagonalisierbar und seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A. Es gilt:

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

LÖSUNG:
Da A diagonalisierbar ist, gibt es ein $S \in \mathrm{GL}(n, K)$, so dass $D := SAS^{-1}$ eine Diagonalmatrix ist, wobei auf der Hauptdiagonale von D die Eigenwerte von A stehen.

$$\det A = \det(S^{-1}DS) = \det S \cdot \det S^{-1} \cdot \det D = \det D = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Aufgabe 2 Man berechne die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

je einmal mit der Regel von Sarrus, durch Zeilen- oder Spaltenumformungen und durch eine Laplace-Entwicklung.

LÖSUNG:
Durch Zeilenumformungen wird A in eine obere Dreiecksmatrix transformiert:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-4) = -4$$

Regel von Sarrus:

$$\det A = 1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = -4$$

Laplace-Entwicklung nach der ersten Spalte:

$$\det A = 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

Aufgabe 3 Man berechne die Determinanten folgender Matrizen:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

LÖSUNG:

$$\det A = 16$$

b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \sqrt{2} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 15 \\ 0 & 0 & -6 & -\pi \end{pmatrix}$$

LÖSUNG:

$$\det B = 6\pi$$

Aufgabe 4 Sei $A \in K^{n \times n}$. Man zeige:

$$\det A = \det A^t$$

Hinweis: Leibniz-Formel.

LÖSUNG:
Sei $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij}) = A^t = (a_{ji})$. Dann gilt mit der Leibniz-Formel:

$$\begin{aligned}\det A^t &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi) b_{1\pi(1)} \dots b_{n\pi(n)} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi) a_{\pi(1)1} \dots a_{\pi(n)n} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi) a_{1\pi^{-1}(1)} \dots a_{n\pi^{-1}(n)}\end{aligned}$$

Nun setzen wir $\sigma = \pi^{-1}$, dann ist $\operatorname{sign}(\sigma) = \operatorname{sign}(\pi)$ und es gilt:

$$\det A^t = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = \det A$$

Aufgabe 5 Man bestimme jeweils das charakteristische Polynom, alle Eigenwerte, sowie alle Eigenräume.

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

LÖSUNG:

$$P_A = (-1)(X-1)(X-\mathrm{i})(X+\mathrm{i})$$
$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \mathrm{i}, \quad \lambda_3 = -\mathrm{i}$$
$$\operatorname{Eig}(A,1) = \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Eig}(A,-\mathrm{i}) = \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1-\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Eig}(A,\mathrm{i}) = \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1+\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$$

LÖSUNG:

$$P_B = (-1)(X-2)^3$$
$$\lambda = 2$$
$$\operatorname{Eig}(B,2) = \mathbb{Q} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{Q} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 Man untersuche A auf Diagonalisierbarkeit. Man gebe gegebenenfalls ein $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und ein $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ an, so dass $D = SAS^{-1}$ eine Diagonalmatrix ist.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Lösung:
Wir berechnen zunächst das charakteristische Polynom

$$\chi_A = \det(A - XE_3) = (4-X)(4-X)(6-X)$$

und erhalten damit die Eigenwerte:

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 6$$

Damit erhält man die Eigenräume:

$$\mathrm{Eig}(A,4) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \mathrm{Eig}(A,6) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Nun sehen wir, dass die Voraussetzungen zur Diagonalisierbarkeit erfüllt sind, denn für alle Eigenwerte stimmen geometrische und algebraische Vielfachheit überein, ausserdem zerfällt das charakteristische Polynom in Linearfaktoren. Wir können beispielsweise die folgende Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren bilden:

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

Mit

$$S^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

folgt dann $D = SAS^{-1}$. Nun invertieren wir noch S^{-1} und erhalten:

$$S = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\-1 & 1 & 1\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Aufgabe 7 Man bestimme eine Transformationsmatrix S, so dass $J = SAS^{-1}$ die Jordansche Normalform zu A ist.

$$A = \begin{pmatrix}2 & -1 & -1 & 0\\8 & -3 & -5 & -4\\-4 & 1 & 3 & 4\\3 & -1 & -2 & -2\end{pmatrix}$$

Hinweis: Man berechne zunächst A^2.

Lösung:
Wir finden durch nachrechnen heraus, dass $A^2 = \vec{0}$ die Nullmatrix ist. Also hat A nur den Eigenwert $\lambda = 0$. Nun berechnen wir für diesen Eigenwert die r_k für die hier gilt, dass $r_k = \mathrm{rang}((A - 0E_4)^k) = \mathrm{rang}(A^k)$.

$$\begin{array}{lcl cl} r_0 & = & \mathrm{rang}(E_4) & = & 4\\ r_1 & = & \mathrm{rang}(A) & = & 2\\ r_2 & = & \mathrm{rang}(A^2) & = & 0\\ \vdots & & & & \end{array}$$

Nun berechnen wir die Folge $c_k = r_{k+1} + r_{k-1} - 2r_k$:

$$\begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_2 &= 2 \\ c_3 &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Also besteht unsere JNF aus 2 Jordan-Blöcken der Grösse 2.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Im nächsten Schritt finden wir eine Transformationsmatrix. Nun müssen wir einen Vektor $v_1^{(2)} \in \mathrm{Ker} A^2 \backslash \mathrm{Ker} A$ wählen, also beispielsweise:

$$v_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dann ergibt sich sofort $v_1^{(1)}$:

$$v_1^{(1)} = (A - 0E_4)v_1^{(2)} = Av_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Nun wählen wir für den zweiten Jordan-Block $v_2^{(2)} \in \mathrm{Ker} A^2 \backslash \mathrm{Ker} A$ so, dass $v_2^{(2)}$ linear unabhängig zu $v_1^{(2)}$ ist. Beispielsweise also.

$$v_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit bekommen wir dann $v_2^{(1)}$:

$$v_2^{(1)} = Av_2^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Diese gefundenen Vektoren schreiben wir nun in die Transformationsmatrix S^{-1}:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} v_1^{(1)} & v_1^{(2)} & v_2^{(1)} & v_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & -3 & 1 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zuletzt invertieren wir S^{-1}:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$