Florian Ettlinger
Übung Donnerstag

Ferienkurs Lineare Algebra
WS 2011/12

Aufgabe 1 Man zeige:

a) Ein nilpotenter Endomorphismus hat nur die Null als Eigenwert.
Hinweis: Ein Endomorphismus F heisst *nilpotent*, wenn es ein k gibt, so dass $F^k = 0$.

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine symmetrische Matrix. Die Eigenwerte von A sind reell.

c) Zwei ähnliche Matrizen haben das selbe charakteristische Polynom.
Hinweis: Zwei Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ heissen zueinander *ähnlich*, wenn es eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ gibt, so dass $B = SAS^{-1}$.

d) Für eine Matrix $A \in \mathrm{GL}(n, K)$ gilt $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

e) Sei A diagonalisierbar und seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A. Es gilt:

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Aufgabe 2 Man berechne die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

je einmal mit der Regel von Sarrus, durch Zeilen- oder Spaltenumformungen und durch eine Laplace-Entwicklung.

Aufgabe 3 Man berechne die Determinanten folgender Matrizen:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \sqrt{2} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 15 \\ 0 & 0 & -6 & -\pi \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 Sei $A \in K^{n\times n}$. Man zeige:

$$\det A = \det A^t$$

Hinweis: Leibniz-Formel.

Aufgabe 5 Man bestimme jeweils das charakteristische Polynom, alle Eigenwerte, sowie alle Eigenräume.

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$$

Aufgabe 6 Man untersuche A auf Diagonalisierbarkeit. Man gebe gegebenenfalls ein $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und ein $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ an, so dass $D = SAS^{-1}$ eine Diagonalmatrix ist.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7 Man bestimme eine Transformationsmatrix S, so dass $J = SAS^{-1}$ die Jordansche Normalform zu A ist.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 8 & -3 & -5 & -4 \\ -4 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Man berechne zunächst A^2.