Technische Universität München

Department of Physics

Ferienkurs zur Linearen Algebra, Musterlösungen zu den Übungsaufgaben

Mittwoch

Daniel Jost

Aufgabe 1

Bestimmen Sie für die Menge M jeweils die Dimension von $\mathrm{Lin}(M)$ und geben Sie eine Basis von $\mathrm{Lin}(M)$ an, die nur aus Elementen von (M) besteht.

(a) $M = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^3$

(b) $M = \{(1+i)z, i+3z^2, z-iz^2, (1+i)z^2) \subset \mathbb{C}[z]_2\}$

Lösung 1:

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich ist der Rang der Matrix $2 = \dim(\mathrm{Lin}(M))$. Man kann hier die ersten beiden Zeilen als Basis verwenden.

(b) Mit der Standardbasis $B = (1, z, z^2)$ von $\mathbb{C}[z]_2$ erhält man

$$\begin{pmatrix} 0 & 1+i & 0 \\ i & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1+i \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} i & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1+i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Rang der Matrix ist $3 = \dim(\mathrm{Lin}(M))$. Die Vektoren, die den ersten drei Zeilen entsprechen, liegen in M, womit $B' = \{i+3z^2, z-iz^2, (1+i)z^2\} \subset M$ eine Basis von $\mathrm{Lin}(M)$ ist.

Aufgabe 2

Betrachten Sie den Vektorraum $V = \mathbb{R}[z]_2$ und darin den Untervektorraum $U = \mathrm{Lin}(p_1, p_2, p_3)$ mit den Elementen

$$p_1 = 2 + z^2 \; p_2 = 4z - z^2 \; p_3 = 1 - 2z + z^2$$

(a) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis von U

(b) Zeigen Sie, dass $p = 3 + 2z + z^2 \in U$ und ermitteln Sie die Basisdarstellung ${}_Bp$ von p bezüglich der oben gewählten Basis.

Lösung 2:

(a) Zur Bestimmung der Dimension von U müssen die Polynome auf lineare Unabhängigkeit überprüft werden. Dazu setzt man mit der Standardbasis des Vektorraums formaler Polynome an und stellt die Elemente von U bezüglich dieser Standardbasis dar, was mit $E = (1, z, z^2)$

$$_E p_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad _E p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad _E p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ergibt. Wendet man nun Gauß auf die entsprechende Matrix an, sieht man

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sofort, dass $\dim(U) = 2$. Nun können wir zwei Vektoren aus U als Basis wählen, beispielsweise $B = p_2, p_3$.

(b) Je nachdem, welche Basis in (a) gewählt wurde, kann die Rechnung anders aussehen. Hier exemplarisch für die gewählte Basis. Seien nun $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, dann überprüft man leicht, dass $\lambda p_2 + \mu p_3 = p$ für bestimmte λ, μ:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & |3 \\ 4 & -2 & |2 \\ -1 & 1 & |1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & |2 \\ 0 & 1 & |3 \\ 0 & 0 & |0 \end{pmatrix}$$

Das Polynom p ist als Linearkombination der Basisvektoren darstellbar mit $p = 2p_2 + 3p_3$ womit sich die eindeutige Koordinatendarstellung $_B p = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ finden lässt.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass folgende Mengen linear unabhängig sind und ergänzen Sie zu einer Basis des jeweils angegeben Vektorraums:

(a) $M = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^3$

(b) $M = \{i, z + z^2\} \subset \mathbb{C}[z]_3$

Lösung 3:

(a) Analog zu den vorherigen Aufgaben schreibt man die Vektoren als Zeilen in eine Matrix und bringt diese auf Zeilenstufenform.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Womit lineare Unabhängigkeit gezeigt ist. Erweitern kann man jetzt mit einem beliebigen linear unabhängigen Vektor, etwa

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

(b) Hier muss man zunächst wieder mit der Standardbasis des $\mathbb{C}[z]_3$ ansetzen und die Vektoren der Menge bezüglich dieser Standardbasis darstellen, mit $E = (1, z, z^2, z^3)$ also gerade

$$\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wieder als Einträge einer Matrix aufgefasst, erhält man

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

womit die Polynome selbstverständlich linear unabhängig sind. Ergänzt man nun zu einer Basis, könnte man die obere Matrix beispielsweise folgendermaßen erweitern

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Das entspricht der Erweiterung auf eine Basis des Vektorraums formaler Polynome mit $M = \{i, z + z^2\, z^2, z^3\} \subset \mathbb{C}[z]_3$, wobei dies natürlich nur ein Beispiel darstellt.

Aufgabe 4

Überprüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen linear sind.

(a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \overline{z}$ mit $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum

(b) $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \overline{z}$ mit $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum

(c) $h : K^{m \times n} \to K^{n \times m}, A \mapsto A^T$

Lösung 4:

Die Homomorphismuseigenschaften werden überprüft, also sei V ein K-Vektorraum:

(i) $\forall v, w \in V : f(v+w) = f(v) + f(w)$

(ii) $\forall v \in V, \alpha in K : f(\alpha \cdot v) = \alpha f(v)$

Es sei darauf hingewiesen, dass die Skalare aus dem Körper gewählt werden.

(a) Überprüfen wir zunächst (i): Offensichtlich gilt $\forall z, w \in \mathbb{C} : f(z+w) = \overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} = f(z) + f(w)$. Allerdings geht die skalare Mutliplikation, also (ii) schief, da für $\lambda \in \mathbb{C}$ im Allgemeinen nicht gilt, dass $\overline{\lambda} = \lambda$, also insbesondere $f(\lambda \cdot z) = \overline{\lambda \cdot z} \neq \lambda \cdot \overline{z} = \lambda \cdot f(z)$. Somit ist die Abbildung nicht linear.

(b) Analog zu (a) ist klar, dass die erste Voraussetzung erfüllt ist. Da nun nur mehr Skalare aus $\mathbb{R}$ gestattet sind, gilt insbesondere $\lambda = \overline{\lambda}$, womit es sich hier um einen Homomorphismus handelt.

(c) Anwendung der Rechenregeln für Matrizen ergibt für (i) $h(A+B) = (A+B)^T = A^T + B^T = h(A) + h(B)$ und natürlich gilt auch $f(\lambda \cdot A) = (\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T = \lambda \cdot f(A)$, also handelt es sich in der Tat um einen Homomorphismus.

Aufgabe 5

Es sei V ein K-Vektorraum mit der Basis $B = (b_1, ..., b_m)$. Überprüfen Sie, ob die folgende Abbildung ein Homomorphismus ist:

$$\phi_B : \begin{cases} K^m \to K^m \\ (x_1, ..., x_m) \mapsto \sum_{i=1}^m x_i b_i \end{cases}$$

Lösung 5:

Analog zur vierten Aufgabe müssen wieder die Homomorphismuseigenschaften überprüft werden:

$$\phi_B(\lambda \cdot x + y) = \sum_{i=1}^{m} (\lambda \cdot x_i + y_i) \cdot b_i = \sum_{i=1}^{m} (\lambda \cdot x_i) \cdot b_i + \sum_{i=1}^{m} y_i \cdot b_i = \lambda \cdot \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot b_i + \sum_{i=1}^{m} y_i \cdot b_i = \lambda \cdot \phi_B(x) + \phi_B(y)$$

Also wieder ein Homomorphismus.

Aufgabe 6

Sei $B = (b_1, b_2, b_3)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ und $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathrm{R}^2)$ die durch

$$f(b_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \; f(b_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \; f(b_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eindeutig bestimmte lineare Abbildung.

(a) Bestimmen Sie die darstellende Matrix ${}_E[f]_B$ mit der Standardbasis E des $\mathbb{R}^2$.

(b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix ${}_C[f]_B$ mit $C = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$.

Lösung 6:

(a) Die Lösung zu dieser Aufgabe ist denkbar einfach. Die Bilder der Basisvektoren sind ja bereits bezüglich der Standardbasis angegeben, wodurch die Abbildungsmatrix schon klar ist:

$$ {}_E[f]_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} $$

Dem Schema aus der Vorlesung folgend müssten wir natürlich zunächst die Bilder der Basisvektoren als Linearkombination darstellen. Dies ist aber schon der Fall, da es sich ja gerade um die Standardbasis handelt.

(b) In dieser Aufgabe folgen wir nun wieder strikt dem Schema, das bedeutet, wir betrachten die Bilder der Basisvektoren und stellen sie als Linearkombination dar, womit sich dann die Koordinatendarstellung finden lässt:

$$ f(b_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 \;\Rightarrow\; {}_C f(b_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} $$

$$ f(b_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 \;\Rightarrow\; {}_C f(b_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} $$

$$ f(b_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 \;\Rightarrow\; {}_C f(b_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} $$

Die Koordinatendarstellungen entsprechen wiederum den Einträgen der Abbildungsmatrix

$$ {}_C[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} $$

Aufgabe 7

Betrachten Sie folgende Abbildung

$$ f : V \to V, p \mapsto \frac{d}{dx} p $$

mit $V := \mathbb{R}[z]_4$. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_B[f]_B$.

Lösung 7:

Man wählt wieder die Standardbasis $B = (1, z, z^2, z^3, z^4)$, womit die Bilder der Basisvektoren

$$f(b_1) = 0 \;\Rightarrow\; {}_Bf(b_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(b_2) = 1 \;\Rightarrow\; {}_Bf(b_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(b_3) = 2z \;\Rightarrow\; {}_Bf(b_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(b_4) = 3z^2 \;\Rightarrow\; {}_Bf(b_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(b_5) = 4z^3 \;\Rightarrow\; {}_Bf(b_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und ihre Koordinatendarstellung die Abbildungsmatrix eindeutig festlegen:

$${}_B[f]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8

Betrachten Sie das Beispiel aus der Vorlesung mit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}[z]_2 \to \mathbb{R}[z]_2 \\ p(z) \mapsto 2\frac{d}{dz}p(z) - z\frac{d^2}{dz^2}p(z) \end{cases}$$

sowie der Standardbasis $B = (z^2, z, 1)$. Führen Sie einen Basiswechsel zu $\tilde{B} = (4, 2z, z^2)$ durch. Nutzen Sie dazu, dass sich bei einem Endomorphismus die Transformationsvorschrift zu $[f]_{\tilde{B}} = {}_{\tilde{B}}[f]_{\tilde{B}} = T \cdot {}_B[f]_B \cdot T^{-1}$ mit $T = {}_{\tilde{B}}[id_{\mathbb{R}[z]_2}]_B$ vereinfacht.

Lösung 8:

Wir wählen als Basis $B = (z^2, z, 1)$. Um den Basiswechsel durchführen zu können, benötigen wir die Transformationsmatrix, die gegeben ist mit

$$T = {}_{\tilde{B}}[id_{\mathbb{R}[z]_2}]_B$$

Diese Herangehensweise ist nicht gerade förderlich, da man deutlich einfacher die Inverse dieser Matrix bestimmen können, eben gerade

$$T^{-1} = {}_B[id_{\mathbb{R}[z]_2}]_{\tilde{B}}$$

Dazu muss man die Basisvektoren der neuen Basis als Linearkombination der Vektoren der alten Basis darstellen:

$$\tilde{b}_1 = 4b_3\ ,\ \tilde{b}_2 = 2b_2\ ,\ \tilde{b}_3 = b_1$$

Somit ist

$$T^{-1} = {}_B[id_{\mathbb{R}[z]_2}]_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

was mit der Transformationsformel

$$[f]_{\tilde{B}} = {}_{\tilde{B}}[f]_{\tilde{B}} = T \cdot {}_B[f]_B \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ergibt.

Aufgabe 9

Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis von Kern(f) und eine Basis von $Bild(f)$.

(b) Ist die Abbildung injektiv? Ist sie surjektiv?

(c) Betrachten Sie die Basen

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

und

$$C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Bestimmen Sie ${}_C[f]_B$.

Lösung 9:

(a) Wir bestimmen zunächst den Kern der Abbildung

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Kern der Matrix ist also gegeben mit

$$x = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit ist beispielsweise

$$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis des Kerns von f. Da der Kern zweidimensional ist, ist das Bild gemäß der Dimensionsformel ebenfalls zweidimensional. Gemäß der Zeilenstufenform, die oben berechnet wurde, sind die ersten beiden Spalten linear unabhängig, womit zum Beispiel

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis von $bild(f)$ ist.

(b) Da $\dim \text{kern}(f) = 2$ ist $\text{kern}(f) \neq 0$, also nicht injektiv.
Da $\dim \text{bild}(f) = 2$ ist $\text{bild}(f) \neq \mathbb{R}^3$, also nicht surjektiv.

(c) Wir betrachten die Bilder der Basisvektoren

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \; , \; A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

wobei die Bilder der letzten beiden Basisvektoren gerade die Null ergeben. Damit ist die Darstellungsmatrix also

$${}_C[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alternativ hätte man natürlich auch die Transforamtionsformel anwenden können.