Technische Universität München

Department of Physics

Ferienkurs zur Linearen Algebra, Musterlösungen zu den Übungsaufgaben

Mittwoch

Daniel Jost

Aufgabe 1

Bestimmen Sie für die Menge M jeweils die Dimension von $\mathrm{Lin}(M)$ und geben Sie eine Basis von $\mathrm{Lin}(M)$ an, die nur aus Elementen von (M) besteht.

(a) $M = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^3$

(b) $M = \{(1+i)z, i + 3z^2, z - iz^2, (1+i)z^2) \subset \mathbb{C}[z]_2\}$

Aufgabe 2

Betrachten Sie den Vektorraum $V = \mathbb{R}[z]_2$ und darin den Untervektorraum $U = \mathrm{Lin}(p_1, p_2, p_3)$ mit den Elementen

$$p_1 = 2 + z^2 \; p_2 = 4z - z^2 \; p_3 = 1 - 2z + z^2$$

(a) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis von U

(b) Zeigen Sie, dass $p = 3 + 2z + z^2 \in U$ und ermitteln Sie die Basisdarstellung ${}_B p$ von p bezüglich der oben gewählten Basis.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass folgende Mengen linear unabhängig sind und ergänzen Sie zu einer Basis des jeweils angegeben Vektorraums:

(a) $M = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^3$

(b) $M = \{i, z + z^2\} \subset \mathbb{C}[z]_3$

Aufgabe 4

Überprüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen linear sind.

(a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \overline{z}$ mit $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum

(b) $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \overline{z}$ mit $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum

(c) $h : K^{m \times n} \to K^{n \times m}, A \mapsto A^T$

Aufgabe 5

Es sei V ein K-Vektorraum mit der Basis $B = (b_1, ..., b_m)$. Überprüfen Sie, ob die folgende Abbildung ein Homomorphismus ist:

$$\phi_B : \begin{cases} K^m \to K^m \\ (x_1, ..., x_m) \mapsto \sum_{i=1}^m x_i b_i \end{cases}$$

Aufgabe 6

Sei $B = (b_1, b_2, b_3)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ und $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathrm{R}^2)$ die durch

$$f(b_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \; f(b_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \; f(b_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eindeutig bestimmte lineare Abbildung.

(a) Bestimmen Sie die darstellende Matrix ${}_E[f]_B$ mit der Standardbasis E des $\mathbb{R}^2$.

(b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix ${}_C[f]_B$ mit $C = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$.

Aufgabe 7

Betrachten Sie folgende Abbildung

$$f : V \to V, p \mapsto \frac{d}{dx} p$$

mit $V := \mathbb{R}[z]_4$. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_B[f]_B$.

Aufgabe 8

Betrachten Sie das Beispiel aus der Vorlesung mit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}[z]_2 \to \mathbb{R}[z]_2 \\ p(z) \mapsto 2\frac{d}{dz} p(z) - z\frac{d^2}{dz^2} p(z) \end{cases}$$

sowie der Standardbasis $B = (z^2, z, 1)$. Führen Sie einen Basiswechsel zu $\tilde{B} = (4, 2z, z^2)$ durch. Nutzen Sie dazu, dass sich bei einem Endomorphismus die Transformationsvorschrift zu $[f]_{\tilde{B}} = {}_{\tilde{B}}[f]_{\tilde{B}} = T \cdot {}_B[f]_B \cdot T^{-1}$ mit $T = {}_{\tilde{B}}[id_{\mathbb{R}[z]_2}]_B$ vereinfacht.

Aufgabe 9

Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$ und eine Basis von $Bild(f)$.

(b) Ist die Abbildung injektiv? Ist sie surjektiv?

(c) Betrachten Sie die Basen

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

und

$$C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Bestimmen Sie ${}_C[f]_B$.