Technische Universität München

Department of Physics

Ferienkurs zur Linearen Algebra, Musterlösungen zu den Übungsaufgaben

Montag

Daniel Jost

Hinweis: Es werden einige Beweise abgefragt. Bevor Sie zu fluchen beginnen und den Tutor verteufeln, soll gesagt werden, dass es primär darum geht den in der Vorlesung behandelten Stoff zu verinnerlichen und sich mit den Definitionen auseinanderzusetzen. Ob Sie die Beweise im Stande sind zu lösen, ist hier nur von marginaler Bedeutung.

1 Relationen und Funktionen

Aufgabe 1

Gegeben sei eine binäre Relation auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit

$$a|b :\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{Z} : a \cdot c = b$$

Ist diese Relation (man nennt sie Teilbarkeitsrelation, sprich a teilt b) reflexiv, symmetrisch und/oder transitiv? Denken Sie dabei an die Definitionen aus dem Skript.

Lösung 1:

1. Reflexivität: Es ist zu überprüfen

   $$\text{reflexiv} :\Leftrightarrow \forall a \in A : (a, a) \in R$$

   Sei $a \in \mathbb{Z}$; da $c := 1 \in \mathbb{Z}$ gilt $1 \cdot a = a \;\Rightarrow a|a \in R \forall a \in \mathbb{Z}$, also reflexiv.

2. Symmetrie: Es ist zu überprüfen

   $$\text{symmetrisch} :\Leftrightarrow \forall a, b \in A : (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$$

   Seien $a, b \in \mathbb{Z}$, dann muss gelten, dass $\exists c \in \mathbb{Z} : a \cdot c = b \wedge b \cdot c = a$. Dies ist nicht der Fall, da $b = a \cdot c = \frac{a}{c} \;\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{c}$ mit $c \neq 1 \;\Rightarrow \frac{1}{c} \notin \mathbb{Z}$, also nicht symmetrisch.

3. Transitivität: Es ist zu überprüfen

   $$\text{transitiv} :\Leftrightarrow \forall a, b, c \in A : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$$

   Seien $a, b, c \in \mathbb{Z} : a|b \wedge b|c \;\Rightarrow \exists d, e \in \mathbb{Z} : a \cdot d = b \wedge b \cdot e = c \Rightarrow a \cdot d \cdot e = b \cdot e = c \;\Rightarrow a|c$, also transitiv.

Aufgabe 2

Überprüfen Sie, ob es sich bei der folgenden Relation um eine Äquivalenzrelation handelt:

$$R = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | a = b\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

Lösung 2:

1. Reflexivität: Es ist zu überprüfen

$$\text{reflexiv} :\Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{N}(a,a) \in R$$

   $a = a \forall a \in \mathbb{N}$ (klar).

2. Symmetrie: Es ist zu überprüfen

$$\text{symmetrisch} :\Leftrightarrow \forall a,b \in \mathbb{N} : (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$$

   Seien $a,b \in \mathbb{N}$, dann gilt $a = b \wedge b = a$

3. Transitivität: Es ist zu überprüfen

$$\text{transitiv} :\Leftrightarrow \forall a,b,c \in \mathbb{N} : (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$$

   Seien $a,b,c \in \mathbb{N} : a = b \wedge b = c \;\Rightarrow a = b = c$, also transitiv.

Also handelt es sich in der Tat um eine Äquivalenzrelation.

Aufgabe 3

Überprüfen Sie folgende Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität.

(i) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n$

(ii) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n+1$

(iii) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 1 \\ n-1, & \text{sonst.} \end{cases}$

(iv) $j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n^2$

Lösung 3:

Injektivität: aus $f(a_1) = b = f(a_2)$ folgt, dass $a_1 = a_2$.
Surjektivität: $W(f) = \{b \in B | \exists a \in A : (a,b) \in f\} = B$

1. Eigentlich trivial, f ist offensichtlich die Identitätsabbildung, womit f bijektiv ist. Formal: Seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, dann ist $f(n_1) \stackrel{!}{=} f(n_2) \;\Rightarrow n_1 = n_2$ also injektiv. Surjektivität ist nun aber wirklich klar.

2. g ist nicht surjektiv, da $1 \in \mathbb{N}$, aber $\nexists n \in \mathbb{N}$, sodass $g(n) = 1$; seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ womit $g(n_1) \stackrel{!}{=} g(n_2)$ also $n_1 + 1 = n_2 + 2 \Leftrightarrow n_1 = n_2$. Insofern ist g offensichtlich injektiv.

3. $h(1) = 1 = h(2)$ aber $1 \neq 2$, also ist h nicht injektiv. Jedoch surjektiv, da $\forall n > 1 : h(n+1) = n$.

4. Seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ womit $j(n_1) = n_1^2$ und $j(n_2) = n_2^2$. Also ist j injektiv, da $n_1^2 = n_2^2 \Rightarrow n_1 = n_2$; allerdings ist j nicht surjektiv, da $\nexists n \in \mathbb{N} : j(n) = 3$.

2 Gruppen und Körper

Aufgabe 4

Beweisen Sie folgenden Satz:

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe, dann gilt

(a) $\forall e \in G : e \circ a = a \circ e = a$ (Jedes linksneutrale Element ist auch rechtsneutral.)

(b) $\forall a' \in G \text{mit} a' \circ a = e : a \circ a' = e$ (Jedes linksinverse Element ist auch rechtsinvers.)

(c) $\exists_1 e \in G : a \circ e = a$ (Es existiert genau ein neutrales Element.)

(d) $\exists_1 a' \in G : a \circ a' = e$ (Es existiert genau ein inverses Element.)

Zeigen Sie zuerst (b), dann (a), (c), (d).

Lösung 4:

(b) Seien $a'', a' \in G$, wobei a'' invers zu a' ist. Dann gilt

$$a \circ a' = e \circ a \circ a' = (a'' \circ a') \circ a \circ a' = a'' \circ (a' \circ a) \circ a' = a'' \circ e \circ a' = a'' \circ a' = e$$

(a) Es gilt $\forall a \in G : e \circ a = a$. Sei $a' \in G$ invers zu a, und setzen an

$$a \circ e = a \circ a \circ a' = (a \circ a') \circ a = e \circ a = a$$

.

(c) Seien $e, e' \in G$ beide neutrale Elemente. Dann ist

$$e = e \circ e' = e' \circ e = e'$$

wobei hier nicht ein mal die Eigenschaft auf (a) verwenden mussten.

(d) Seien $a', a'' \in G$ inverse Elemente zu $a \in G$, dann gilt

$$a' \circ a = e = a'' \circ a \Rightarrow a' \circ a \circ a'' = a'' \circ a \circ a'' \Rightarrow a' \circ e = a' = a'' = a'' \circ e$$

Aufgabe 5

Seien $(\mathbb{Z}, +)$,$(\mathbb{Q}, +)$ und $(\mathbb{R}, +)$ Gruppen. Sind folgende Abbildungen Homomorphismen?

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, r \mapsto r + 1$
2. $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, q \mapsto \frac{q}{2}$
3. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$

Lösung 5:

1. f ist kein Homomorphismus, da $f(r_1 + r_2) = r_1 + r_2 + 1 \neq r_1 + r_2 + 2 = f(r_1) + f(r_2)$
2. g ist ein Homomorphismus, da $\forall p, q \in \mathbb{Q} : g(p + q) = \frac{p+q}{2} = \frac{p}{2} + \frac{q}{2} = g(p) + g(q)$
3. h ist selbstverständlich kein Homomorphismus, da $h(x + y) = x^2 + y^2 + 2xy \neq h(x) + h(y)$

Aufgabe 6

Betrachten Sie die symmetrische Gruppe $(S_3, \circ)$. Ermitteln Sie alle Elemente dieser Gruppe und bestimmen Sie das jeweilige Signum.

Lösung 6:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; die Fehlstände offensichtlich $\emptyset$, somit $\mathrm{sgn} = 1$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; die Fehlstände sind $\{(1, 3), (2, 3)\}$, also $\mathrm{sgn} = (-1)^2$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; die Fehlstände sind $\{(1, 2), (1, 3)\}$, also $\mathrm{sgn} = (-1)^2$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; der Fehlstand ist $\{(3, 2)\}$, also $\mathrm{sgn} = (-1)^1 = -1$
5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; die Fehlstände sind $\{(3, 2), (3, 1), (2, 1)\}$, also $\mathrm{sgn} = (-1)^3 = -1$
6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; der Fehlstand ist $\{(2, 1)\}$, also $\mathrm{sgn} = -1$

3 Vektorräume

Aufgabe 7

Beweisen Sie folgenden Satz:
Sei V ein K-Vektorraum. Dann gilt

(a) $\forall v \in V : 0 \cdot v = 0$

(b) $\forall \alpha \in K : \alpha \cdot 0 = 0$

(c) $\forall \alpha \in K, v \in V : \alpha \cdot v = 0 \;\Rightarrow \alpha = 0 \vee v = 0$

Lösung 7:

(a) $0 \cdot v = (0+0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$; subtrahiere auf beiden Seiten $0 \cdot v$.

(b) $\alpha \cdot 0 = \alpha \cdot (0+0) = \alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0$; subtrahiere auf beiden Seiten $\alpha \cdot 0$

(c) Falls $\alpha \neq 0$ existiert das inverse Element $\alpha^{-1} \in K$. Somit

$$v = 1 \cdot v = \alpha^{-1} \cdot \alpha \cdot v = \alpha^{-1} \cdot 0 = 0$$

Aufgabe 8

Sei V ein K-Vektorraum, $W \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie unter Verwendung der Eigenschaften eines Untervektorraumes, dass die Relation

$$v\mathbf{R}w :\Leftrightarrow v - w \in W$$

eine Äquivalenzrelation definiert.

Lösung 8:

Wieder auf Reflexivität, Transitivität und Symmetrie überprüfen.

1. Reflexivität: Für jeden Vektorraum gilt $\mathbf{0} \in V$, natürlich auch und insbesondere für den Untervektorraum. Also ist $v - v = \mathbf{0} \in W \;\Rightarrow v\mathbf{R}v \;\forall v \in W$.

2. Symmetrie: Die Frage ist nun, falls $v - w \in W$, gilt dann auch $w - v \in W$? Dies klärt das dritte Untervektorraumaxiom, da $-1 \in K \;\Rightarrow (-1) \cdot (v - w) \in W$.

3. Transitivität: $u, v, w \in W$ mit $u\mathbf{R}v$,$v\mathbf{R}w$, also $u - v \in W$, $v - w \in W$, zweites Untervektorraumaxiom liefert $(u - v) + (v - w) = u - w \in W$.

Damit ist $\mathbf{R}$ eine Äquivalenzrelation.