Technische Universität München

Department of Physics

Ferienkurs zur Linearen Algebra, Übungsaufgaben

Montag

Daniel Jost

Hinweis: Es werden einige Beweise abgefragt. Bevor Sie zu fluchen beginnen und den Tutor verteufeln, soll gesagt werden, dass es primär darum geht den in der Vorlesung behandelten Stoff zu verinnerlichen und sich mit den Definitionen auseinanderzusetzen. Ob Sie die Beweise im Stande sind zu lösen, ist hier nur von marginaler Bedeutung.

1 Relationen und Funktionen

Aufgabe 1

Gegeben sei eine binäre Relation auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit

$$a|b :\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{Z} : a \cdot c = b$$

Ist diese Relation (man nennt sie Teilbarkeitsrelation, sprich a teilt b) reflexiv, symmetrisch und/oder transitiv? Denken Sie dabei an die Definitionen aus dem Skript.

Aufgabe 2

Überprüfen Sie, ob es sich bei der folgenden Relation um eine Äquivalenzrelation handelt:

$$R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | a = b\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

Aufgabe 3

Überprüfen Sie folgende Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität.

(i) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n$

(ii) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$

(iii) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 1 \\ n - 1, & \text{sonst.} \end{cases}$

(iv) $j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n^2$

2 Gruppen und Körper

Aufgabe 4

Beweisen Sie folgenden Satz:

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe, dann gilt

(a) $\forall e \in G : e \circ a = a \circ e = a$ (Jedes linksneutrale Element ist auch rechtsneutral.)

(b) $\forall a' \in G \text{mit} a' \circ a = e : a \circ a' = e$ (Jedes linksinverse Element ist auch rechtsinvers.)

(c) $\exists_1 e \in G : a \circ e = a$ (Es existiert genau ein neutrales Element.)

(d) $\exists_1 a' \in G : a \circ a' = e$ (Es existiert genau ein inverses Element.)

Zeigen Sie zuerst (b), dann (a), (c), (d).

Aufgabe 5

Seien $(\mathbb{Z}, +)$,$(\mathbb{Q}, +)$ und $(\mathbb{R}, +)$ Gruppen. Sind folgende Abbildungen Homomorphismen?

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, r \mapsto r + 1$
2. $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, q \mapsto \frac{q}{2}$
3. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$

Aufgabe 6

Betrachten Sie die symmetrische Gruppe $(S_3, \circ)$. Ermitteln Sie alle Elemente dieser Gruppe und bestimmen Sie das jeweilige Signum.

3 Vektorräume

Aufgabe 7

Beweisen Sie folgenden Satz:
Sei V ein K-Vektorraum. Dann gilt

(a) $\forall v \in V : 0 \cdot v = 0$

(b) $\forall \alpha \in K : \alpha \cdot 0 = 0$

(c) $\forall \alpha \in K, v \in V : \alpha \cdot v = 0 \ \Rightarrow \alpha = 0 \lor v = 0$

Aufgabe 8

Sei V ein K-Vektorraum, $W \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie unter Verwendung der Eigenschaften eines Untervektorraumes, dass die Relation

$$v\mathbf{R}w :\Leftrightarrow v - w \in W$$

eine Äquivalenzrelation definiert.