Felix Rucker, Matthias Herzog Übungsklausur 9.9.2011

Ferienkurs Quantenmechanik

Übungsklausur

1 Kurze Fragen

a) Wie ist ein quantenmechanischer Drehimpuls definiert?

b) Wie beschreibt man ein Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen?

c) Welche Werte können beim Wasserstoff die Quantenzahlen l und m bei gegebenen n annehmen?

d) Wie lauten die Energieeigenwerte des Wasserstoffs, und wie hoch ist ihre Entartung?

e) Was besagt das Variationsprinzip?

f) Inwiefern bewirkt der normale Zeemaneffekt eine Aufhebung der Entartung?

2 Halbierter harmonischer Oszillator

Ein Teilchen bewege sich entlang der positiven x-Achse in einem Oszillatorpotential $V(x) = m\omega^2 x^2/2$. Die negative x-Achse sei aufgrund eines unendlich hohen Potentials $V(x < 0) = \infty$ für das Teilchen unzugänglich.

a) Berechnen Sie die diskreten Energie-Eigenwerte des Problems mit Hilfe der WKB-Bedingung:

$$\int_0^{x_E} k(x)dx = (n - \frac{1}{4})\pi \tag{1}$$

für die eindimensionale Bewegung mit einer harten Wand. (x_E Ist der klassische Umkehrpunkt)
Hinweis:

$$\int_0^1 \sqrt{1-y^2}dy = \pi/4 \tag{2}$$

b) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit den ungeraden Zuständen des harmonischen Oszillators und begründen Sie mögliche Koinzidenzen.

3 Phasenverschiebung durch Gravitation

Ein Teilchen der Energie $E = \hbar^2 k^2/(2m)$ bewege sich im Gravitationspotential $V(z) = mgz$ von einem Punkt A bei $x = 0$, $z = 0$ zu einem Punkt D bei $x = l$ und $z = h$ auf jeweils geraden wegen entweder über den Punkt B mit $x = 0$, $z = h$ oder über den Punkt C bei $x = l$, $z = 0$.

a) Berechnen Sie den Unterschied $\varphi_{BD} - \varphi_{AC}$ in der Phasendifferenz φ_{BD} bzw. φ_{AC} der stationären Wellenfunktion $\psi(x) = |\psi|e^{i\varphi(x)}$ bei der Bewegung entlang der Wege BD und AC als Funktion von m, g, l, h und dem Wellenvektor $k(x) = \frac{2\pi}{\lambda}$ in x-Richtung des bei A einfallenden Teilchens unter der Annahme, dass die Wellenfunktion jeweils eine ebene Welle ist und $E >> mgh$ gilt.
Hinweis: Beachten Sie, dass der Wellenvektor bei fester Gesamtenergie E von z abhängt. Die Phasendifferenz φ_{BD} ist definiert durch $\varphi_{BD} = [\varphi(x = l) - \varphi(x = 0)]_{z=h}$ und analog für φ_{AC} bei $z = 0$.

b) Bestimmen Sie die Periodizität Δh in der Höhendifferenz h, nach der sich das am Punkt D ergebende Interferenzmuster proportional zu $\cos(\varphi_{ABD} - \varphi_{ACD})$ wiederholt. Wie groß ist δh für Neutronen mit Wellenlänge $\lambda = 1.4 Å$ und $l = 5cm$? (Verwenden Sie $(2\varphi h)/m_n \approx 4 \cdot 10^{-3} cm^2/sec$.)
Hinweis: Da die Gesamtenergie E und das Potential auf den Abschnitten AB und CD identisch sind, fallen die Änderungen der Phase auf diesen Abschnitten in der gesamten Phasendifferenz $\varphi_{ABD} - \varphi_{ACD}$ der beiden Wege heraus.
Bemerkung: Die Rechnung ist die Grundlage für das berühmte sogenannte 'COW'-Experiment von Colella, Overhauser und Werner, Phys. Rev. Lett. **34.**, 1472 (1975)

4 Variationsprinzip

Wir betrachten ein Teilchen der Masse m in einem eindimensionalen Potential

$$V(x) = \lambda x^4. \tag{3}$$

a) Schreiben Sie den Hamiltonoperator $\hat{H}$ in Ortsdarstellung.

b) Berechnen Sie mit der Variationsmethode und folgender Testfunktion

$$u(x) = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \mathrm{e}^{-\alpha x^2} \tag{4}$$

einen genäherten Wert für den Grundzustand des Systems.
Hinweis:

$$\int_0^\infty x^{2n} \mathrm{e}^{-bx^2} \mathrm{d}x = \frac{(2n)!}{2^{2n+1} n! b^n} \sqrt{\frac{\pi}{b}} \tag{5}$$

5 Störungsrechnung

Wir betrachten folgenden Hamiltonoperator mit Störung in Matrixdarstellung:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W} \tag{6}$$

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\hat{W} = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \tag{8}$$

für die Konstante c gilt $|c| << 1$

a) Berechnen Sie die exakten Eigenwerte $E_{1,2,3}$ von $\hat{H}$.

b) Berechnen Sie dann die Eigenwerte von $\hat{H}$ in zweiter Ordnung Störungstheorie.

c) Vergleichen Sie das störungstheoretische Ergebnis mit einer Binomialentwicklung (Taylorentwicklung um $c = 0$) der exakten Eigenwerte.