Matthias Herzog

Ferienkurs Quantenmechanik

Näherungsmethoden

1 Kurze Fragen

a) Wann darf man die Störungsrechnung anwenden?

b) Welche Testfunktionen sind bei der Variationsrechnung erlaubt, und welche Testfunktionen sind besonders geeignet?

2 Mehrteilchensystem

Zwei identische Bosonen werden in einem unendlich hohen Potentialtopf mit Wänden bei $x = 0$ und $x = a$ platziert. Ihr Zustand sei das symmetrische Produkt der Einteilchenwellenfunktionen

$$|n_1 n_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|n_1\rangle |n_2\rangle + |n_2\rangle |n_1\rangle \right). \tag{1}$$

Die Einteilchenwellenfunktion in Ortsdarstellung lautet

$$\langle x | n\rangle = \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right). \tag{2}$$

Über ein Potential erfahren die beiden Teilchen eine schwache Wechselwirkung:

$$V(x_1, x_2) = -aV_0 \delta(x_1, x_2) \tag{3}$$

mit konstantem V_0. Berechnen Sie die Grundzustandsenergie in erster Ordnung Störungstheorie.

Hinweis:

$$\int \sin^4(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4b}\sin(2bx) + \frac{1}{32}\sin(4bx) \tag{4}$$

3 Variationsrechnung und Störungstheorie

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Variationsmethode, dass die Grundzustandsenergie in erster Ordnung Störungstheorie nie kleiner ist als die tatsächliche Grundzustandsenergie:

$$E_0^0 + E_0^1 \geq E_0 \tag{5}$$

b) Zeigen Sie außerdem, dass die Energiekorrektur zum Grundzustand in zweiter Ordnung Störungstheorie nie größer als 0 ist:

$$E_0^2 \leq 0 \tag{6}$$

4 Variationsverfahren

Führen Sie für das Potential

$$V(x) = \begin{cases} fx & \text{für } x \geq 0 \\ +\infty & \text{für } x < 0 \end{cases} \tag{7}$$

das Variationsverfahren unter Verwendung der Versuchsfunktionenschar $u(x)$ mit dem Variationsparameter α durch:

$$u(x) = x\mathrm{e}^{-\alpha x}. \tag{8}$$

a) Geben Sie die dazugehörige minimierte Energie an.

Hinweis:

$$\int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-px} \mathrm{d}x = \frac{n!}{p^{n+1}} \tag{9}$$

b) Überlegen Sie sich ein Beispiel, wo dieses Potential in der Realität auftauchen kann.

5 Heliumatom

Wir betrachten jetzt ein Heliumatom, bestehend aus 2 Protonen ($Z = 2$) und zwei Elektronen, wobei in sehr guter Näherung angenommen werden kann, dass der Atomkern unendlich schwer ist. Unter Vernachlässigung relativistischer und durch Spins hervorgerufener Effekte lautet der Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + V \tag{10}$$

$$\text{mit} \quad \hat{H}_i = \frac{\hat{P}_i^2}{2m_e} - \frac{2e^2}{|\mathbf{x}_i|} \tag{11}$$

$$\text{und} \quad V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{e^2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}. \tag{12}$$

V beschreibt die abstossende Kraft zwischen den beiden Elektronen und ist als Störterm zu betrachten. Berechnen Sie die Energiezustände für das ungestörte Problem und geben sie das Integral für die Grundzustandsenergie dieses Problems in 1.Ordnung Störungstheorie an.