Matthias Herzog

Ferienkurs Quantenmechanik

Drehimpulse und dreidimensionale Probleme

1 Kurze Fragen

a) Geben Sie den Wert folgender Ausdrücke an:
ε_{123}, ε_{313}, ε_{321}, ε_{213}, ε_{113}, ε_{312}, ε_{222}

b) Zeigen Sie:

$$[A,BC] \quad = \quad [A,B]\,C + B\,[A,C] \tag{1}$$

c) Zeigen Sie, dass für einen dreidimensionalen Drehimpuls $\left[J_i, J^2\right]$ aus der Definition $[J_i, J_j] = \mathrm{i}\hbar\varepsilon_{ijk}J_k$ folgt.

d) Zeigen Sie, dass wenn zwei Komponenten eines Drehimpulses mit einem Operator vertauschen, auch die dritte Komponente des Drehimpuls mit diesem Operator vertauscht.

e) Welche Eigenwerte haben die drei Pauli-Matrizen?

f) Woraus folgt die Ganzzahligkeit der Drehimpulsquantenzahlen beim Wasserstoff?

2 Spin-1-Algebra

Statt eines Spin-1/2-Teilchens wie in der Vorlesung betrachten wir jetzt ein Spin-1-Teilchen mit $s = 1$.

a) Welche Werte kann jetzt die zweite Quantenzahl m_s?
Lösung: -1,0,1

b) Schreiben Sie die drei möglichen Eigenzustände in der Diracschen Bra-Ket-Notation.

c) Stellen Sie die drei Zustände durch drei Spaltenvektoren (*Spinoren*) $\chi(+)$, $\chi(0)$ und $\chi(-)$ dar.

d) Wenden Sie die Operatoren $\hat{S}^2$ und $\hat{S}_z$ auf die drei oben beschriebenen Zustände χ an.

e) Benutzen Sie diese Ergebnisse, um $\hat{S}^2$ und $\hat{S}_z$ in Matrixschreibweise zu schreiben.

f) Wenden sie den Auf- und Absteigeoperator auf die drei Eigenzustände an.

g) Bestimmen Sie daraus $\hat{S}_+$ und $\hat{S}_-$ in Matrixschreibweise.

h) Bestimmen Sie schließlich auch noch $\hat{S}_x$ und $\hat{S}_y$ in Matrixschreibweise.

3 Starrer Rotator im Magnetfeld

Der Hamiltonoperator eines starren Rotators in einem Magnetfeld ist

$$\hat{H} = \frac{\hat{L}^2}{2\Theta} + \gamma \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{L}} \tag{2}$$

mit dem Bahndrehimpulsoperator $\hat{\mathbf{L}}$ und den beiden Konstanten Trägheitsmoment Θ und gyromagnetisches Verhältnis γ.

a) Der Rotator befindet sich zuerst in einem konstanten Magnetfeld in z-Richtung:

$$\mathbf{B}_a = B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

b) Dann befindet sich der Rotator in einem konstanten Magnetfeld der folgenden Form:

$$\mathbf{B}_b = B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Geben Sie für beide Fälle die möglichen Energieeigenwerte des Systems an.

4 Dreidimensionaler harmonischer Oszillator

Der Hamiltonoperator des dreidimensionalen isotropen harmonischen Oszillators lautet in der Ortsdarstellung

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 |\mathbf{x}|^2 \tag{5}$$

mit der Masse m.

a) Schreiben Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung des Systems in Kugelkoordinaten. Machen Sie dazu den üblichen Ansatz für die Wellenfunktion Ψ:

$$\Psi(r,\theta,\varphi) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{6}$$

Warum ist dieser Separationsansatz gerechtfertigt?

b) Setzt man jetzt, analog zum Wasserstoffatom in der Vorlesung,

$$u_l(r) = r^{l+1} v_l(\rho)\,\mathrm{e}^{-\rho/2} \tag{7}$$

$$\text{mit} \quad \rho = \frac{m\omega}{\hbar} r^2 \tag{8}$$

ist die Schrödingergleichung äquivalent zu der *laguerrschen Differentialgleichung*

$$\left(\rho \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \left(l + \frac{3}{2} - \rho\right)\frac{\partial}{\partial \rho} + n\right) v_l(\rho) = 0 \tag{9}$$

Wer Lust dazu hat, kann das nachrechnen und den Parameter n bestimmen. Das korrekte Ergebnis lautet

$$n = \frac{1}{2}\left(\frac{E}{\hbar\omega} - l - \frac{3}{2}\right) \tag{10}$$

Machen Sie nun einen Potenzreihenansatz und geben Sie eine Rekursionsformel für die Koeffizienten a_j an.

c) Warum muss diese Reihe abbrechen? Geben Sie die Abbruchbedingung an und bestimmen Sie daraus die Quantisierungsvorschrift für die Energie des Oszillators.

d) Berechnen Sie die Entartung der Energieniveaus: Setzen Sie $N = 2n + l$ und überlegen Sie, wie hoch die Anzahl der Zustände zur Energie $E_N = \hbar\omega\left(N + \frac{3}{2}\right)$ ist. Es reicht, wenn Sie die Rechnung für gerade N durchführen.