Felix Rucker

Ferienkurs Quantenmechanik

Eindimensionale Probleme

1 Kurze Fragen

a) Geben Sie die Definition von Auf- und Absteigeoperator an und drücken Sie Orts- und Impulsoperator durch Auf- und Absteigeoperatoren aus.

b) Wann bietet sich ein Separationsansatz für die Wellenfunktion $\psi(\vec{x},t)$ an?

c) Leiten Sie die stationäre Schrödingergleichung durch einen Separationsansatz aus der allgemeinen Schrödinger-Gleichung her.

d) Nennen Sie 3 Eigenschaften kohärenter Zustände.

e) Zeigen Sie: Wenn ψ_ν Eigenfunktion von $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ zum Eigenwert ν ist, so ist $\hat{a}^\dagger \psi_\nu$ Eigenfunktion von $\hat{n}$ mit Eigenwert $\nu + 1$.

2 Potentialbarriere

Ein Teilchen der Masse m und kinetischer Energie $E < U$ trifft von links auf eine Potentialbarriere der Form

$$V(x) = \begin{cases} U > 0 & \text{für } 0 < x < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass diese Situation durch eine Wellenfunktion der Form

$$\psi(x) \begin{cases} re^{-ikx} + e^{ikx} & \text{für } x < 0 \\ Ae^{-\kappa x} + Be^{\kappa x} & \text{für } 0 < x < a \\ te^{ik(x-a)} & \text{für } x > a \end{cases} \tag{2}$$

dargestellt werden kann und bestimmen Sie k und κ als Funktion von m, E und U.

b) Zeigen Sie, dass

$$t = \frac{4ik\kappa}{(k+i\kappa)^2 e^{\kappa a} - (k-i\kappa)^2 e^{-\kappa a}} \tag{3}$$

gilt.

c) Wie nennt man den sich hier andeutenden Effekt. Nennen Sie zwei Beispiele, wo dieser Effekt in Natur oder Technik auftritt.

3 Kohärente Zustände

Der Grundzustand $|0\rangle$ des linearen Harmonischen Oszillators wird durch die Gleichung $\hat{a}\,|0\rangle = 0$ definiert. Dieser Zustand wird durch den Weyl-Operator

$$\hat{D}(z) = \exp(z\hat{a}^{\dagger} - \bar{z}\hat{a}) \tag{4}$$

in einen sogenannten kohärenten Zustand $|z\rangle = \hat{D}(z)\,|0\rangle$ transformiert, dabei ist $z \in \mathbb{C}$ eine beliebige komplexe Zahl.

a) Zeigen Sie, dass der unitäre Operator $\hat{D}(z)$ eine Verschiebung von $\hat{a}$ um z bewirkt, d.h. $\hat{D}^{\dagger}(z)\hat{a}\hat{D}(z) = \hat{a} + z$. Daher ist $|z\rangle$ ein Eigenzustand von $\hat{a}$ mit Eigenwert z.
Hinweis: Benützen Sie die Haussdorff'sche Reihe für Operatoren

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A},\hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A}[\hat{A},\hat{B}]] + ... \tag{5}$$

b) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle\hat{x}\rangle$ und $\langle\hat{p}\rangle$ und ihre Schwankungen Δx und Δp im Zustand $|z\rangle$ und zeigen Sie, dass kohärente Zustände immer die minimale Unschärfe besitzen. Bestimmen Sie analog den Erwartungswert der Energie und die entsprechende Schwankung ΔH.

4 Unendlich hoher Potentialtopf

Ein Teilchen der Masse m ist in einem eindimensionalen Bereich $0 \leq x \leq a$ eingeschlossen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die normierte Wellenfunktion beschrieben durch:

$$\psi(x,t=0) = \sqrt{\frac{8}{5a}}\left[1 + \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right]\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \tag{6}$$

a) Wie lautet die Wellenfunktion zu einem späteren Zeitpunkt $t = t_0$?
Hinweis: Leiten sie die stationären Lösungen des Problems her, und drücken sie den gegebenen Anfanszustand durch eine linearkombination stationärer Zustände aus. Folgern sie dann die allgemeine zeitabhängige Lösung. Verwenden Sie:

$$\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) \tag{7}$$

b) Was ist der Erwartungswert der Energie bei $t = 0$ und $t = t_0$?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen bei $t = t_0$ innerhalb der linken Hälfte des Potentialtopfes $(0 \leq x \leq a/2)$ zu finden? Wie kann man sich so ein Ergebnis anschaulich klarmachen?
Hinweis:

$$\int \sin^2(kx) = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2kx)}{4k} \tag{8}$$

5 Quasistationäre Zustände

Betrachten Sie ein Teilchen, das sich im Bereich $x > 0$ im Potential

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{m\lambda_0}\delta(x-a) \tag{9}$$

bewegt, mit $\lambda_0 > 0$. Für negative x sei $V(x<0) = \infty$. Das Teilchen befindet sich also in einem unendlich hohen Kasten der Breite a, der aber nach einer Seite durchlässig ist.

a) Geben Sie die Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung mit Energie $E = \hbar^2 k^2/2m > 0$ im Bereich $0 < x < a$ an, die die korrekte Randbedingung für $x = 0$ erfüllt.

b) Leiten Sie die Gleichung für den zugehörigen Wert von k aus den Anschlussbedingungen für die Wellenfunktion bei $x = a$ ab unter der Annahme, dass für $x > a$ eine auslaufende ebene WElle te^{ikx} vorliegt. Diese Gleichung kann in der dimensionslosen Variable $\zeta = ka$ in der Form

$$1 - \exp\{2i\zeta\} = 2i\zeta/\beta \tag{10}$$

geschrieben werden, mit $\beta = 2a/\lambda_0$. Gibt es eine Lösung mit rein reellem k?

c) Machen Sie im Limes $\beta \gg 1$ für die Lösungen den Ansatz (ε und η_n seien reell)

$$\zeta_n = n\pi(1 - \varepsilon) - i\eta_n, \quad n = 1, 2, 3... \tag{11}$$

und bestimmen Sie ε und η_n jeweils in führender Ordnung in $1/\beta$ unter der Annahme, dass $\beta \gg 2\pi n$.
Hinweis: Zerlegen Sie die transzedente Gleichung in Real- und Imaginärteil und verwenden Sie die Entwicklung

$$\mathrm{Re}(1 - \exp 2i\zeta) \approx (2\pi n\varepsilon)^2/2 - 2\eta_n. \tag{12}$$

d) Bestimmen Sie die zugehörigen komplexen Energien $E_n = \mathrm{Re}E_n - i\Gamma_n/2$ und geben Sie mit Hilfe der Zeitentwicklung $\propto \exp(-iE_n t/\hbar)$ stationärer Zustände eine physikalische Interpretation des Ergebnises. An welcher Stelle versagt in diesem Beispiel die übliche Argumentation, dass die Energieeigenwerte reell sein müssen?

6 Bandstruktur im Kronig-Penney Modell

Ein sehr einfaches Beispiel für ein periodisches Potenzial in einer Dimension ist das Kronig-Penney Potential

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{m\lambda_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - na) \quad \text{mit} \quad \lambda_0 > 0 \tag{13}$$

a) Bestimmen sie aus der Bloch-Bedingung $\psi(x + a) = e^{iqa}\psi(x)$ die Wellenfunktion im Bereich $a < x < 2a$, die zur allgemeinen Lösung $\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ in $0 < x < a$ gehört ($\hbar k = \sqrt{2mE} > 0$). Die Bedingung, dass $\psi(x)$ bei $x = a$ stetig ist und $\psi'(x)$ um $2\psi(a)/\lambda_0$ springt, ergibt ein homogenes Gleichungssystem. Nichtverschwindende Koeffizienten A und B sind also nur möglich, wenn die entsprechende Determinatne verschwindet. Bestimmen Sie daraus den impliziten Zusammenhang zwischen den erlaubten Werten von k und damit E bei gegebenem Quasi-Impuls q.

b) Schreiben Sie die Eigenwert-Bedingung in der Form

$$\cos(qa) = \frac{\cos(ka + \delta(k))}{|t(k)|} := \mu(k) \tag{14}$$

und zeigen Sie, dass dabei $t(k) = |t(k)|\exp\{i\delta(k)\}$ gerade die Transmissionsamplitude an einer einzelnen δ-Funktion ist.

c) Zeigen Sie, dass im Limes $k \to 0$ die Phase den Wert $\delta(k \to 0) = -\frac{\pi}{2}$ annimmt und $|t(k)|$ linear in k verschwindet und interpretieren Sie dieses Ergebnis. Plotten Sie die Funktion $\mu(k)$ als Funktion von ka für den Fall $\frac{a}{\lambda_0} = 5$ und skizzieren Sie die Lage der erlaubten Energiebänder.