Ferienkurs Theoretische Mechanik SS 2011

Lösungen Freitag

Aufgabe 1: Rotation eines Quaders um die Raumdiagonale

Die Hauptachsen verlaufen durch den Schwerpunkt des Quaders parallel zu den Kanten. Die Kante der Länge a verlaufe parallel zur x_1-Achse, die der Länge b parallel zur x_2-Achse, die der Länge c parallel zur x_3-Achse. Mit dem Schwerpunkt des Quaders im Ursprung des Koordinatensystems berechnen wir zunächst Θ_{33}:

$$\Theta_{33} = \int_{\text{Quader}} \mathrm{d}^3x \rho\left(\vec{x}\right)\left(\vec{x}^{\,2} - x_3^2\right) = \rho_0 \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x_1 \int_{-b/2}^{b/2} \mathrm{d}x_2 \int_{-c/2}^{c/2} \mathrm{d}x_3 \left(x_1^2 + x_2^2\right) = \dots$$

mit der konstanten Dichte ρ_0 des Quaders. Für diese gilt offenbar $\rho_0 = \frac{M}{abc}$; damit folgt:

$$\dots = 4 \cdot \frac{M}{abc} c \int_0^{a/2} \mathrm{d}x_1 \int_0^{b/2} \mathrm{d}x_2 \left(x_1^2 + x_2^2\right) = \frac{4M}{ab} \int_0^{a/2} \mathrm{d}x_1 \left(\frac{b}{2} x_1^2 + \frac{b^3}{24}\right) =$$

$$= \frac{4M}{ab} \left(\frac{b}{2} \cdot \frac{a^3}{24} + \frac{b^3}{24} \cdot \frac{a}{2}\right) = \frac{M}{12}\left(a^2 + b^2\right)$$

Da alle drei Richtungen x_1, x_2, x_3 bis auf die unterschiedlichen Längen der entsprechenden Quaderseiten geometrisch äquivalent sind, erhalten wir die Trägheitsmomente Θ_{11} und Θ_{22} durch Austauschen von a mit c bzw. von b mit c:

$$\Theta_{11} = \frac{M}{12}\left(c^2 + b^2\right) \quad , \quad \Theta_{22} = \frac{M}{12}\left(a^2 + c^2\right)$$

Dies bestimmt den gesamten Trägheitstensor, der ja im Hauptachsensystem diagonal ist:

$$\Theta = \frac{M}{12} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

Der auf 1 normierte Richtungsvektor $\vec{n}$ einer Raumdiagonale[1] ist

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Gemäß Vorlesung berechnet sich das Trägheitsmoment für eine Rotation um diese Achse gemäß

$$\Theta_{\text{Diag}} = \vec{n}^{\mathrm{T}} \Theta \vec{n} = \frac{M}{12\left(a^2 + b^2 + c^2\right)} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} =$$

[1] Welche der vier Raumdiagonalen man hier wählt, ist für die Berechnung des Trägheitsmoments um eine Raumdiagonale aus Symmetriegründen irrelevant.

$$= \frac{M}{12\left(a^2+b^2+c^2\right)}\left(a^2\left(b^2+c^2\right)+b^2\left(a^2+c^2\right)+c^2\left(a^2+b^2\right)\right) = \frac{M}{6}\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Aufgabe 2:
Vollzylinder als physikalisches Pendel

a) Wir führen zunächst ein neues Koordinatensystem $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$, $\tilde{x}_3$ ein, wobei die $\tilde{x}_3$- und $\tilde{x}_1$-Achse parallel zur x_3 bzw. x_1-Achse durch den Schwerpunkt des Zylinders verlaufen; die $\tilde{x}_2$-Achse stimme mit der x_2-Achse überein. Wir berechnen die 33-Komponente des Trägheitstensors im verschobenen Koordinatensystem:

$$\tilde{\Theta}_{33} = \int_{\text{Zylinder}} \mathrm{d}^3\tilde{x}\ \rho_0\left(\left(\tilde{x}_1^2+\tilde{x}_2^2+\tilde{x}_3^2\right)-\tilde{x}_3^2\right)$$

mit der konstanten Dichte $\rho_0 = \frac{M}{\pi R^2 L}$ des Zylinders. Nun verwenden wir Zylinderkoordinaten (r, φ, z) und verwenden $r^2 = \tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2$:

$$\tilde{\Theta}_{33} = \frac{M}{\pi R^2 L}\int_0^R \mathrm{d}r\, r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-L/2}^{L/2}\mathrm{d}z\ r^2 = \frac{M}{\pi R^2 L}\frac{R^4}{4}2\pi L = \frac{1}{2}MR^2$$

Da das verschobene Koordinatensystem den Schwerpunkt des Zylinders als Ursprung hat, dürfen wir den Satz von Steiner verwenden, um das 33-Element des Trägheitstensors Θ_{33} im unverschobenen Koordinatensystem (dasjenige in der Skizze der Aufgabenstellung) zu berechnen. Der Verschiebungsvektor $\vec{a}$ im Satz von Steiner ist in diesem Fall

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit folgt:

$$\Theta_{33} = \tilde{\Theta}_{33} + M\left(\vec{a}^2\delta_{33} - a_3 a_3\right) = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

Das Trägheitsmoment für die Rotation des Zylinders um die Achse $\vec{n} = (0,0,1)^{\mathrm{T}}$ ist gegeben durch $\vec{n}^{\mathrm{T}}\Theta\vec{n} = \Theta_{33} = \frac{3}{2}MR^2$.

In diesem Fall ist der Ursprung des körperfesten Koordinatensystems KS in Ruhe, d.h. in der Notation der Vorlesung ist $\vec{v}_0 = 0$. Daher gilt für die kinetische Energie des Zylinders:

$$T = T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\Theta_{33}\dot{\varphi}^2 = \frac{3}{4}MR^2\dot{\varphi}^2$$

b) Wir wählen das in der Lösung zu Aufgabenteil a) eingeführte Koordinatensystem mit den Achsen $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$, $\tilde{x}_3$ als körperfestes Koordinatensystem KS, wobei sich (wie immer in einem körperfesten Koordinatensystem) die Achsen entsprechend der Bewegung des Zylinders mitbewegen. Dann ist der Schwerpunkt des Zylinders stets der Ursprung von KS, also gilt gemäß Vorlesung:

$$T = T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}M\vec{v}_0^2 + \frac{1}{2}\tilde{\Theta}_{33}\dot{\varphi}^2$$

wobei $\vec{v}_0$ die Geschwindigkeiten des Schwerpunktes im Laborsystem (also z.B. das Koordinatensystem aus der Skizze in der Angabe) ist. Es ist zu beachten, dass sich T_{rot} hier auf die Rotation des körperfesten Systems KS bezieht und nicht das gleiche T_{rot} wie in der Lösung zu Aufgabenteil a) ist; wir verwenden also $\tilde{\Theta}_{33}$ und benötigen **nicht** den Satz von Steiner. Mit $|\vec{v}_0| = R\dot{\varphi}$ und $\tilde{\Theta}_{33} = \frac{1}{2}MR^2$ folgt:

$$T = \frac{1}{2}MR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}MR^2\dot{\varphi}^2 = \frac{3}{4}MR^2\dot{\varphi}^2$$

Dies reproduziert natürlich das Ergebnis aus a).

c) Aus der zweiten Skizze in der Angabe folgt, dass der Schwerpunkt die x_2-Koordinate $x_2^{\mathrm{S}} = -R\cos(\varphi)$ hat. Bis auf eine beliebige additive Konstante lautet daher die potentielle Energie des Zylinders im Schwerefeld

$$V(\varphi) = Mgx_2^{\mathrm{S}} = -MgR\cos(\varphi)$$

Zusammen mit dem Ergebnis aus a) oder b) erhalten wir die Lagrangefunktion des Zylinders:

$$L = T - V = \frac{3}{4}MR^2\dot{\varphi}^2 + MgR\cos(\varphi)$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial\varphi}$ lautet hier

$$\frac{3}{2}MR^2\ddot{\varphi} = -MgR\sin(\varphi) \quad\Rightarrow\quad \ddot{\varphi} + \frac{2}{3}\frac{g}{R}\sin(\varphi) = 0$$

d) Für kleine Auslenkungen machen wir die Näherung $\sin(\varphi) \approx \varphi$ und erhalten die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{3}\frac{g}{R}\varphi = 0\,,$$

also eine Gleichung für eine harmonische Schwingung mit der Frequenz $\omega := \sqrt{\frac{2g}{3R}}$ (nicht zu verwechseln mit der Winkelgeschwindigkeit). Die allgemeine Lösung ist bekanntermaßen

$$\varphi(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\ .$$

Die Konstanten A und B ergeben sich aus dabei den Anfangsbedingungen. Die Bedingung $\varphi(0) = 0$ ergibt sofort $A = 0$, damit gilt $\varphi(t) = B\sin(\omega t)$ sowie $\dot{\varphi}(t) = B\omega\cos(\omega t)$. Mit der Bedingung $\dot{\varphi}(0) = \alpha$ errechnet sich verbleibende Koeffizient zu $B = \frac{\alpha}{\omega}$. Somit ist die gesuchte Lösung

$$\varphi(t) = \frac{\alpha}{\omega}\sin(\omega t)\ .$$

Aufgabe 3:
Rotation eines Kegels

a) Wir wählen die Spitze des Kegels als Ursprung. Die x_3-Achse sei in Richtung des Mittelpunktes des Deckkreises ausgerichtet (also in der Angabenskizze senkrecht nach unten), als x_1-Achse wählen wir die Rotationsachse. Das Trägheitsmoment für eine Drehung um die x_1-Achse ist dann der Θ_{11}-Eintrag des Trägheitstensors:

$$\Theta_{11} = \int_{\text{Kegel}} \mathrm{d}^3x\rho_0 \left[\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) - x_1^2\right]$$

wobei ρ_0 die konstante Massendichte des Kegels sei. Wir werten das Integral in Zylinderkoordinaten aus, d.h. $x_1 = r\cos(\varphi)$, $x_2 = r\sin(\varphi)$, $x_3 = z$. Ein horizontaler Schnitt durch den Kegel bei $x_3 = z$ ist ein Kreis mit Radius $R \cdot \frac{z}{h}$. Daher ergibt sich:

$$\Theta_{11} = \rho_0 \int_0^h \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{Rz/h} \mathrm{d}r\, r\left[r^2\sin^2(\varphi) + z^2\right] =$$

$$= \rho_0 \int_0^h \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \left[\frac{1}{4}\left(\frac{R}{h}\right)^4 z^4 \sin^2(\varphi) + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{h}\right)^2 z^4\right] = (*)$$

Ein kleine Nebenrechnung mit Hilfe der Identität aus der Angabe ergibt:

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \sin^2(\varphi) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2\varphi)\right) = \pi - \frac{1}{4}\sin(2\varphi)\,\Big|_0^{2\pi} = \pi$$

Damit können wir weiterrechnen:

$$(*) = \rho_0 \int_0^h \mathrm{d}z \left[\frac{\pi}{4}\left(\frac{R}{h}\right)^4 z^4 + \frac{2\pi}{2}\left(\frac{R}{h}\right)^2 z^4\right] =$$

$$= \rho_0\pi\left(\frac{R}{h}\right)^2\left[\frac{1}{4}\left(\frac{R}{h}\right)^2 \frac{h^5}{5} + \frac{h^5}{5}\right] = \rho_0\pi R^2 h \cdot \frac{1}{20}\left(R^2 + 4h^2\right)$$

Wir verwenden nun, dass das Volumen des Kegels $V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ beträgt. Damit gilt $\rho_0 = \frac{3M}{\pi R^2 h}$ und somit

$$\Theta_{33} = \frac{3M}{\pi R^2 h}\pi R^2 h \cdot \frac{1}{20}\left(R^2 + 4h^2\right) = \frac{3}{20}M\left(R^2 + 4h^2\right)$$

b) Die Aufgabenstellung ist eine Falle: der Satz von Steiner darf hier **nicht** verwendet werden! Denn dieser hat als Vorraussetzung, dass das unverschobene Koordinatensystem den Schwerpunkt als Ursprung besitzt[2]. Da der Schwerpunkt eines Kegels offenbar nicht die Spitze ist, ist die Anwendung hier nicht zulässig. Der Ansatz zur Berechnung ist also, ein neues Koordinatensystem mit der verschobenen Drehachse als x_1-Achse zu definieren und Θ_{11} als Integral explizit zu berechnen:

$$\Theta_{11} = \int_{\text{Kegel}} \mathrm{d}^3x\rho_0 \left[\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) - x_1^2\right]$$

wobei sich hier x_1, x_2 und x_3 auf das neue Koordinatensystem beziehen. Die Berechnung erfolgt dann ähnlich wie in Aufgabenteil a).

[2]Dies sieht man explizit im Beweis; siehe hierzu Aufgabe 5.

Aufgabe 4:
Eine allgemeine Eigenschaft des Trägheitstensors

Wir wählen ein Bezugssystem mit Schwerpunkt im Ursprung und wählen die Hauptachsen als Koordinatenachsen, rechnen also im Hauptachsensystem. In diesem Fall ist der Trägheitstensor diagonal und es gilt:

$$\Theta_x = \Theta_{11} = \sum_{\mu=1}^{N} m_\mu \left[\vec{x}_\mu^{\,2} - (x_\mu)_1 (x_\mu)_1\right] = \sum_{\mu=1}^{N} m_\mu \left[{(x_\mu)_2}^2 + {(x_\mu)_3}^2\right]$$

Analoge Ergebnisse gelten für $\Theta_y = \Theta_{22}$ und $\Theta_z = \Theta_{33}$ mit entsprechend vertauschten Rollen der Indizes 1, 2 und 3. Damit erhält man:

$$\Theta_y + \Theta_z - \Theta_x = \sum_{\mu=1}^{N} m_\mu \left[{(x_\mu)_1}^2 + {(x_\mu)_3}^2 + {(x_\mu)_1}^2 + {(x_\mu)_2}^2 - {(x_\mu)_2}^2 - {(x_\mu)_3}^2\right] =$$

$$= 2 \sum_{\mu=1}^{N} m_\mu {(x_\mu)_1}^2 \geq 0$$

Damit ist die Ungleichung bewiesen. Gleichheit gilt genau dann, wenn alle Summanden im letzten Ausdruck gleich 0 sind, d.h. falls

$$(x_\mu)_1 = 0 \quad \text{für alle } \mu = 1, \ldots, N$$

gilt. Dies bedeutet anschaulich, dass der starre Körper keine Ausdehnung in 1-Richtung besitzt.
Bemerkung: Der Beweis überträgt sich in offensichtlicher Art und Weise auch auf kontinuierliche starre Körper.

Aufgabe 5:
Satz von Steiner

Es seien alle Vorraussetzungen und Notationen aus der Vorlesung gegeben, insbesondere bezeichnen wir die Komponenten des Trägheitstensors im Koordinatensystem (I) mit Θ_{ik}, die im Koordinatensystem (II) mit Θ'_{ik}. Wir beweisen den Satz von Steiner nur für starre Körper mit endlich vielen Massenpunkten; die Verallgemeinerung auf kontinuierliche Körper ist dann offensichtlich.
Nach Definition gilt im System (II):

$$\Theta'_{ik} = \sum_{\mu=1}^{N} m_\mu \left[\vec{x'_\mu}^{\,2} \delta_{ik} - (x'_\mu)_i (x'_\mu)_k\right]$$

Da (II) nach Vorraussetzung aus (I) durch eine Verschiebung um den Vektor $\vec{a}$ hervorgeht, gilt $\vec{x'_\mu} = \vec{x}_\mu + \vec{a}$ für alle $\mu = 1, \ldots, N$. Damit folgt:

$$\Theta'_{ik} = \sum_{\mu=1}^{N} m_\mu \left[(\vec{x}_\mu + \vec{a})^2 \delta_{ik} - \left((x_\mu)_i + a_i\right)\left((x_\mu)_k + a_k\right)\right]$$

Multipliziert man alle Terme aus und verwendet die Definition von Θ_{ik}, so ergibt sich:

$$\Theta'_{ik} = \Theta_{ik} + \underbrace{\sum_{\mu=1}^{N} m_\mu}_{=:M} \left[\vec{a}^{\,2}\delta_{ik} - a_i a_k\right] + \underbrace{\sum_{\mu=1}^{N} m_\mu \left[2\left(\vec{x}_\mu \cdot \vec{a}\right)\delta_{ik} - \left(x_\mu\right)_i a_k - \left(x_\mu\right)_k a_i\right]}_{(*)}$$

Da nach Vorraussetzung der Ursprung von (I) der Schwerpunkt des starren Körpers ist, gilt $\sum_{\mu=1}^{N} m_\mu \vec{x}_\mu = 0$ bzw. in Komponenten $\sum_{\mu=1}^{N} m_\mu \left(x_\mu\right)_i = 0$. Daher verschwinden alle Terme in $(*)$ und der Satz von Steiner ist bewiesen.