Ferienkurs Theoretische Mechanik SS 2011

Übungen Freitag

Aufgabe 1:
Rotation eines Quaders um die Raumdiagonale

Betrachten Sie einen homogenen Quader der Masse M mit Seitenlängen a, b und c. Der Quader rotiere um eine Achse, die mit einer der Raumdiagonalen (d.h. der Verbindung einer der Ecken mit der am weitesten entfernten Ecke) zusammenfällt. Berechnen Sie das Trägheitsmoment für die Rotation um diese Achse.
Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst die Lage der Hauptachsen und berechnen Sie den gesamten Trägheitstensor in diesem Koordinatensystem. Nutzen Sie dabei Symmetrieargumente aus!

Aufgabe 2:
Vollzylinder als physikalisches Pendel

Betrachten Sie einen homogenen Vollzylinder der Masse M mit Länge L und Radius R. Dieser sei an einer masselosen Stange entlang der x_3-Achse tangential zur Mantelfläche aufgehängt (siehe Skizze).

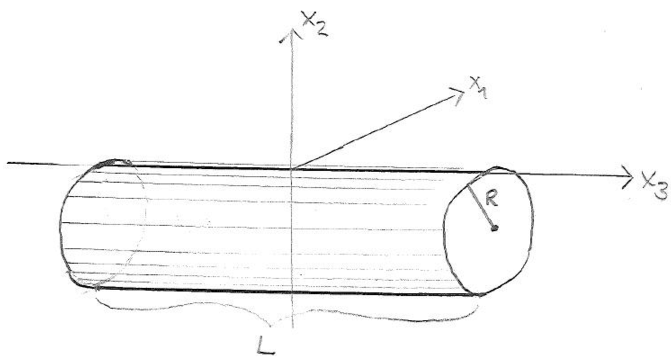


Abbildung 1: Aufgehängter Zylinder

Der Zylinder kann reibungsfrei um die x_3-Achse rotieren; ferner wirke entlang der x_2-Achse das homogene Schwerefeld der Erde.

Die Auslenkung des Zylinders werde durch den Winkel φ parametrisiert; siehe hierzu die Skizze der Frontansicht des Zylinders auf der nächsten Seite.

a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Zylinders um seine Rotationsachse mit Hilfe des Satzes von Steiner. Berechnen Sie damit die kinetische Energie T des Zylinders abhängig von der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$.

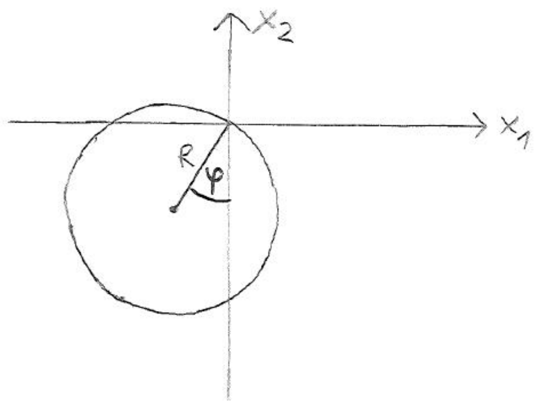


Abbildung 2: Frontansicht des Zylinders

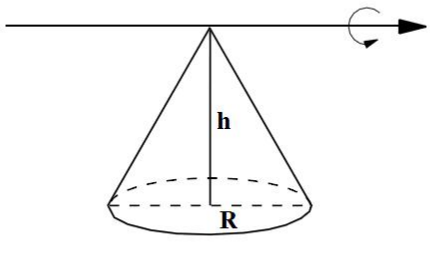
b) Berechnen Sie die kinetische Energie T nun auf eine andere Weise, **ohne** den Satz von Steiner zu verwenden.

c) Stellen Sie die Lagrangefunktion L des Zylinders auf und berechnen Sie die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung für die verallgemeinerte Koordinate φ.

d) Wie verhält sich das System für $\varphi \ll 1$? Geben Sie die linearisierte Bewegungsgleichung für φ an und lösen Sie sie für die Anfangsbedingungen $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = \alpha$.

Aufgabe 3: Rotation eines Kegels

a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment für die Rotation eines symmetrischen Kreiskegels (Höhe h, Radius R, homogene Massendichte mit Gesamtmasse M) um die in der Abbildung angegebene Drehachse.



Hinweise:

- In diesem Fall ist die Berechnung im Hauptachsensystem nicht sinnvoll. Wählen Sie ein der Aufgabenstellung angepasstes Bezugs- und

Koordinatensystem und überlegen Sie sich, welche Einträge des Trägheitstensors Sie berechnen müssen.

- Vielleicht benötigen Sie die Identität $\sin^2(\varphi) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\varphi))$.

b) Die neue Rotationsachse verlaufe nun parallel zu der Rotationsachse aus a) durch den Mittelpunkt des Deckkreises des Kegels. Wie würden Sie das Trägheitsmoment bzgl. dieser Achse am einfachsten berechnen? Sie dürfen, falls benötigt, das Ergebnis aus Teilaufgabe a) verwenden.
Hinweis: Geben Sie nur den Ansatz zur Berechnung an.

Aufgabe 4:
Eine allgemeine Eigenschaft des Trägheitstensors

Gegeben sei ein beliebiger starrer Körper mit Hauptträgheitsmomenten Θ_x, Θ_y und Θ_z. Zeigen Sie:

$$\Theta_x \leq \Theta_y + \Theta_z$$

In welchem Fall gilt Gleichheit?

Aufgabe 5:
Satz von Steiner

Beweisen Sie den Satz von Steiner aus der Vorlesung (Kapitel 2.2.1).
Hinweis: Setzen Sie für Θ'_{ik} die Definition ein und beachten Sie die genauen Vorraussetzungen beim Satz von Steiner.