Kreuzprodukt und Levi-Civita-Symbol

Viele Gesetze der Physik, insbesondere in der klassischen Mechanik und Elektrodynamik enthalten Kreuzprodukte von Vektoren. Die übliche Definition ist

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Umformungen von Identitäten, die ein oder mehrere Kreuzprodukte enthalten, wie z.B. $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$ können im Prinzip komponentenweise ausgeführt werden, so kann man z. B. durch stupides Ausrechnen von allen Komponenten die Relation

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$$

beweisen. Es gibt jedoch eine viel elegantere, systematische Art und Weise, solche Umformungen durchzuführen.

Definition:
Das **Levi-Civita-Symbol** ϵ_{ijk} ist für Indizes $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ folgendermaßen definiert:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (ijk) \text{ eine gerade Permutation von (123) ist} \\ -1 & \text{falls } (ijk) \text{ eine ungerade Permutation von (123) ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiele sind $\epsilon_{123} = 1$, $\epsilon_{132} = -1$, $\epsilon_{122} = 0$. Eine wichtige Eigenschaft ist die Invarianz von ϵ_{ijk} unter zyklischer Permutation:

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij}$$

Zusammenhang mit Kreuzprodukt

Die wichtigste Verwendung des Levi-Civita-Symbols tritt beim Kreuzprodukt auf:

$$\boxed{\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j b_k}$$

Man kann leicht (ein für allemal) verifizieren, dass diese Definition des Kreuzprodukts mit der obigen übereinstimmt; wir tun dies exemplarisch für $i = 1$:

$$\sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{1jk} a_j b_k = \epsilon_{123} a_2 b_3 + \epsilon_{132} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2$$

Beachte, dass alle anderen Terme in der Summe über j und k wegfallen, da in diesen Summanden nicht alle Indizes im Levi-Civita-Symbol verschieden sind.

Beispiel für eine Anwendung:
Man kann mit Hilfe der Definition des Kreuzproduktes über das Levi-Civita-Symbol leicht beweisen, dass $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ gilt; für $i = 1, 2, 3$ gilt:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j b_k = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} b_k a_j =$$

$$= -\sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ikj} b_k a_j = -\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)_i$$

wobei von der ersten auf die zweiten Zeile verwendet wurde, dass das Signum der Permutation (ijk) und (ikj) verschieden ist; d.h. falls (ijk) eine gerade Permutation von (123) ist, ist (ikj) eine ungerade, und umgekehert.

Identitäten für das Levi-Civita-Symbol

Beim Beweis von Kreuzprodukt-Identitäten werden oftmals folgende Identitäten benötigt:

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

$$\sum_{i,j=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijn} = 2\delta_{kn}$$