Ferienkurs Theoretische Mechanik SS 2011

Lösungen Donnerstag

Aufgabe 1:
Herleitung der Hamiltongleichungen

Ausgangspunkt ist die Definition der Hamiltonfunktion:

$$H = H(q,p,t) := \left(\sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k(q,p,t)\, p_k \right) - L(q, \dot{q}(q,p,t), t)$$

Mit Hilfe der Kettenregel und der Definition der verallgemeinerten Impulse ergibt sich

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_i} p_k - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \sum_{k=1}^{f} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}_{=p_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = \dots$$

Dabei ist zu beachten, dass in diesem Kontext die $\dot{q}_i$ Funktionen der q_i sind, während per Definition die p_i unabhängige Variablen sind, d.h. insbesondere nicht von den q_i abhängen. Mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen ergibt sich:

$$\dots = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = -\dot{p}_i$$

wobei wiederum die Definition der verallgemeinerten Impulse eingesetzt wurde.

Die zweite Hamiltongleichung erhält man ähnlich:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_i} p_k + \dot{q}_k \underbrace{\frac{\partial p_k}{\partial p_i}}_{\delta_{ki}} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}_{p_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_i} \right) = \dot{q}_i$$

Aufgabe 2:
Teilchen im elektromagnetischen Feld

a) Es gibt drei verallgemeinerte Impulse[1]:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = m\dot{r}_i + \frac{e}{c} A_i$$

Damit lautet die Hamiltonfunktion:

$$H = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{p} - L = m\dot{\vec{r}}^2 + \frac{e}{c}\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}} - \left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - e\Phi + \frac{e}{c}\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}}\right) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + e\Phi$$

[1] In der Lösung wird die $\vec{r}$-Abhängigkeit von Φ und $\vec{A}$ zur besseren Lesbarkeit unterdrückt.

Für das Endergebnis müssen alle verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{\vec{r}}$ mit Hilfe der Definitionsgleichungen der verallgemeinerten Impulse eliminiert werden:

$$H = H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\Phi$$

b) Wir stellen zunächst die Hamiltongleichungen für die p_i auf und differenzieren dabei mit Hilfe des angegebenen Hinweises:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial r_i} = -\frac{1}{2m} \cdot 2 \sum_{j=1}^{3} \left[\left(p_j - \frac{e}{c}A_j\right) \cdot \left(-\frac{e}{c}\right) \cdot \frac{\partial A_j}{\partial r_i} \right] - e\frac{\partial \Phi}{\partial r_i}$$

Aus a) sind die Relationen $p_j - \frac{e}{c}A_j = m\dot{r}_j$ bekannt. Damit ergibt sich:

$$\dot{p}_i = -\frac{1}{2m} \cdot 2 \sum_{j=1}^{3} \left[m\dot{r}_j \cdot \left(-\frac{e}{c}\right) \cdot \frac{\partial A_j}{\partial r_i} \right] - e\frac{\partial \Phi}{\partial r_i} = \frac{e}{c} \sum_{j=1}^{3} \left[\dot{r}_j \frac{\partial A_j}{\partial r_i} \right] - e\frac{\partial \Phi}{\partial r_i}$$

Differenziert man die Relationen $m\dot{r}_i = p_i - \frac{e}{c}A_i$ nach der Zeit, so ergibt sich

$$m\ddot{r}_i = \dot{p}_i - \frac{e}{c}\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t} = \frac{e}{c} \sum_{j=1}^{3} \left[\dot{r}_j \frac{\partial A_j}{\partial r_i} \right] - e\frac{\partial \Phi}{\partial r_i} - \frac{e}{c} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial A_i}{\partial r_j}\dot{r}_j =$$

$$= \frac{e}{c} \sum_{j=1}^{3} \left[\dot{r}_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial r_i} - \frac{\partial A_i}{\partial r_j} \right) \right] - e\frac{\partial \Phi}{\partial r_i} = \frac{e}{c} \left(\dot{\vec{r}} \times \left(\nabla \times \vec{A} \right) \right)_i - e\frac{\partial \Phi}{\partial r_i}$$

wobei die in der Angabe aufgeführte Identität verwendet wurde. Setzt man noch die gegebenen Definition der Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ ein, ergibt sich

$$m\ddot{\vec{r}} = \frac{e}{c}\dot{\vec{r}} \times \vec{B} + e\vec{E}$$

c) Für $\vec{A} \equiv 0$ und $\Phi = \Phi(x)$ gilt nach Teilaufgabe a):

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + e\Phi(x)$$

Offenbar sind y und z zyklische Koordinaten, da $\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial z} = 0$. Gemäß Vorlesung folgt daraus, dass die zugehörigen verallgemeinerten Impulse Erhaltungsgrößen sind:

$$p_y = m\dot{y} \equiv \text{const.} \quad \text{und} \quad p_z = m\dot{z} \equiv \text{const.}$$

Aufgabe 3: Poissonklammern

a) Nach Definition gilt:

$$\{q_i, q_j\} = \sum_k \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k}\frac{\partial q_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k}\frac{\partial q_j}{\partial q_k} \right) = \sum_k (0 - 0) = 0$$

$$\{p_i, p_j\} = \sum_k \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right) = \sum_k (0 - 0) = 0$$

$$\{q_i, p_j\} = \sum_k \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right) = \sum_k (\delta_{ik}\delta_{jk} - 0) = \delta_{ij}$$

b) Es gilt offenbar $L_1 = q_2p_3 - q_3p_2$ und $L_2 = q_3p_1 - q_1p_3$. Damit folgt:

$$\{L_1, L_2\} = \sum_i \left[\frac{\partial (q_2p_3 - q_3p_2)}{\partial q_i} \frac{\partial (q_3p_1 - q_1p_3)}{\partial p_i} - \frac{\partial (q_2p_3 - q_3p_2)}{\partial p_i} \frac{\partial (q_3p_1 - q_1p_3)}{\partial q_i} \right] =$$

$$= \sum_i \left[(\delta_{2i}p_3 - \delta_{3i}p_2)(\delta_{1i}q_3 - \delta_{3i}q_1) - (\delta_{3i}q_2 - \delta_{2i}q_3)(\delta_{3i}p_1 - \delta_{1i}p_3) \right] =$$

$$= \sum_i \left[\delta_{3i}p_2\delta_{3i}q_1 - \delta_{3i}q_2\delta_{3i}p_1 \right] = q_1p_2 - q_2p_1 = L_3$$

c) Nach der Kettenregel gilt:

$$\frac{\mathrm{d}f(q,p,t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Setzt man die Hamiltongleichungen für $\dot{q}_i$ und $\dot{p}_i$ ein, ergibt sich:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{f} \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right] + \frac{\partial f}{\partial t} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

wobei im letzten Schritt die Definition der Poissonklammer $\{f, H\}$ verwendet wurde.

d) Da f und g nicht explizit von der Zeit abhängen und Erhaltungsgrößen sind, folgt $\{f, H\} = \{g, H\} = 0$. Verwendet man nun die Jacobi-Identität aus der Vorlesung mit $h = H$, so folgt:

$$\{f, \{g, H\}\} + \{g, \{H, f\}\} + \{H, \{f, g\}\} = 0$$

Wegen der Antisymmetrie der Poissonklammern ist $\{H, f\} = -\{f, H\} = 0$ und somit folgt $\{H, \{f, g\}\} = 0$. Da f und g nicht explizit von der Zeit abhängen, hängt nach Definition der Poissonklammern auch $\{f, g\}$ nicht explizit von t ab, somit gilt gemäß Aufgabenteil a):

$$\frac{\mathrm{d}\{f, g\}}{\mathrm{d}t} = \{\{f, g\}, H\} = -\{H, \{f, g\}\} = 0$$

wobei zunächst die Antisymmetrie der Poissonklammern und danach das oben hergeleitete Ergebnis $\{H, \{f, g\}\} = 0$ verwendet wurde.

Zusatzaufgabe:
Kreuzprodukt-Identität

Grundlage ist die Formel $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} a_j b_k$. Damit ergibt sich:

$$\left(\vec{v} \times (\nabla \times \vec{w})\right)_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} v_j \left(\nabla \times \vec{w}\right)_k = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} v_j \sum_{lm} \epsilon_{klm} \partial_l w_m =$$

$$= \sum_{jlm} \left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right) v_j \partial_l w_m = \sum_j v_j \partial_i w_j - v_j \partial_j w_i = \sum_j v_j \left(\frac{\partial w_j}{\partial r_i} - \frac{\partial w_i}{\partial r_j}\right)$$

wobei die Identität aus der Aufgabenstellung und die Abkürzung $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial r_i}$ verwendet wurde.