Ferienkurs Theoretische Mechanik SS 2011

Übungen Donnerstag

Aufgabe 1: Herleitung der Hamiltongleichungen

Leiten Sie die Hamiltongleichungen

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad , \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

her. Berechnen Sie dafür mit Hilfe der Kettenregel die partiellen Ableitungen von H nach den q_i und nach den p_i, ausgehend von der Definition von H. Sie dürfen (und müssen) dabei die Euler-Lagrange-Gleichungen verwenden.

Aufgabe 2: Teilchen im elektromagnetischen Feld

Die Lagrangefunktion eines Teilchens mit Ladung e und Masse m in einem elektromagnetischen Feld lautet

$$L\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}\right) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - e\Phi\left(\vec{r}\right) + \frac{e}{c}\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}\left(\vec{r}\right)$$

Dabei seien $\Phi\left(\vec{r}\right)$ und $\vec{A}\left(\vec{r}\right)$ zeitunabhängige Potentiale; diese hängen mit den elektrischen und magnetischen Feldern über

$$\vec{E} = -\nabla\Phi \quad , \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

zusammen. Ferner ist c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

a) Geben Sie alle verallgemeinerten Impulse p_i an. Zeigen Sie, dass die Hamiltonfunktion des Systems durch

$$H\left(\vec{r}, \vec{p}\right) = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\left(\vec{r}\right)\right)^2 + e\Phi\left(\vec{r}\right)$$

gegeben ist.

b) Zeigen Sie, ausgehend von den Hamiltongleichungen, dass das Teilchen den Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{\vec{r}} = \frac{e}{c}\dot{\vec{r}} \times \vec{B}\left(\vec{r}\right) + e\vec{E}\left(\vec{r}\right)$$

folgt. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Verwenden Sie die Hamiltongleichungen für $\dot{p}_i$ und die Ergebnisse aus a), um die $\dot{p}_i$ alleine durch die $\dot{r}_j$ und die Potentiale auszudrücken. Multiplizieren Sie dazu den quadratischen Term in H nicht aus, sondern verwenden Sie, dass $\frac{\partial}{\partial r_i}\left[\vec{a}\left(\vec{r}\right)^2\right] = 2\sum_{j=1}^{3} a_j \frac{\partial a_j}{\partial r_i}$ für beliebige Vektoren $\vec{a}\left(\vec{r}\right)$ gilt.

- Leiten Sie dann mit Hilfe von a) Differentialgleichungen 2. Ordnung für die r_i her. Verwenden Sie[1] die Identität

$$\left(\vec{v} \times (\nabla \times \vec{w})\right)_i = \sum_{j=1}^{3} v_j \left(\frac{\partial w_j}{\partial r_i} - \frac{\partial w_i}{\partial r_j} \right)$$

für beliebige Vektorfelder $\vec{v}\,(\vec{r})$, $\vec{w}\,(\vec{r})$.

c) Es sei nun $\vec{A} \equiv 0$ und $\Phi = \Phi\,(x)$, d.h. Φ soll nicht von y und z abhängen. Welche Variablen sind dann zyklisch und welche Erhaltungssätze folgen daraus?

Aufgabe 3:
Poissonklammern

a) Berechnen Sie für ein beliebiges Hamiltonsche System mit die Possionklammern

$$\{q_i, q_j\} \quad , \quad \{p_i, p_j\} \quad , \quad \{q_i, p_j\}$$

b) Gegeben sei ein Hamiltonsches System mit drei verallg. Koordinaten und Impulsen. Berechnen Sie mit Hilfe von a) die Poissonklammer

$$\{L_1, L_2\}$$

für die Komponenten L_1, L_2 des verallgemeinerten Drehimpulses $\vec{L} = \vec{q} \times \vec{p}$.

c) Es sei $f(q, p, t)$ eine beliebige Funktion. Zeigen Sie:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

d) Es seien $f(q, p)$ und $g(q, p)$ zwei nicht explizit von t abhängige Erhaltungsgrößen eines hamiltonschen Systems. Zeigen Sie, dass $\{f, g\}\,(q, p)$ eine Erhaltungsgröße ist.
Hinweis: Es gibt eine elegante Lösung ohne viel Rechenaufwand, welche nur elementare Eigenschaften der Poissonklammer benötigt.

Zusatzaufgabe:
Kreuzprodukt-Identität

Beweisen Sie mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols ϵ_{ijk} die Identität

$$\left(\vec{v} \times (\nabla \times \vec{w})\right)_i = \sum_{j=1}^{3} v_j \left(\frac{\partial w_j}{\partial r_i} - \frac{\partial w_i}{\partial r_j} \right)$$

für beliebige Vektorfelder $\vec{v}\,(\vec{r})$, $\vec{w}\,(\vec{r})$.
Hinweis: $\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$

[1] Wer den Umgang mit dem Levi-Civita-Symbol ϵ_{ijk} üben will, kann in der Zusatzaufgabe diese Identität herleiten.