Klassische Mechanik - Ferienkurs; Lösungem

Sommersemester 2011, Prof. Metzler

Inhaltsverzeichnis

1 Quickies

1) Gegeben sei die Lagrange-Funktion $\mathscr{L} = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\Theta}^2 + \dot{\phi}^2 R^2 \sin^2\Theta) - mgR\cos\Theta$. Welche Größe ist neben der Energie eine Erhaltungsgröße?
Lösung:
a) ϕ ist eine zyklische Variable, weshalb für den zugehörigen kanonisch-konjugierten Impuls $p_\phi = \frac{d\mathscr{L}}{d\dot{\phi}} = mR^2\sin^2\Theta\dot{\phi}$ gilt.

$$\frac{d}{dt}p_\phi = \frac{d\mathscr{L}}{d\phi} = 0 \tag{1}$$

Somit ist p_ϕ eine Erhaltungsgröße.

2 Lagrange Gleichung 1. Art

2.1 Perle auf Schraubenlinie

Eine Perle gleite reibungsfrei auf einer Schraubenline mit Radius R. Die Gravitationskraft wirkt in negative z-Richtung. Berechne den Bewegungsablauf und die Zwangskräfte.
Lösung:
Die Lagrangefunktion und die zwei Zwangsbedingungen lauten in Zylinderkoordinaten

$$\mathscr{L} = \frac{m}{2}(\dot{z}^2 + \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - mgz \tag{2}$$

$$r - R = 0 \tag{3}$$

$$z - a\phi = 0 \tag{4}$$

$$\Rightarrow m\ddot{z} + mg = \lambda_2 = Z_z \tag{5}$$

$$m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 = \lambda_1 = Z_r \tag{6}$$

$$mr^2\ddot{\phi} + 2mr\dot{r}\dot{\phi} = -a\lambda_2 = Z_\phi \tag{7}$$

Einsetzen der Nebenbedingungen in die Bewegungsgleichungen liefert

$$m(a\ddot{\phi} + g) = \lambda_2 \tag{8}$$

$$-mR\dot{\phi}^2 = \lambda_1 \tag{9}$$

$$mR^2\ddot{\phi} = -a\lambda_2 \tag{10}$$

Aus den Gleichungen (8), (10) folgt:

$$\ddot{\phi} = -\frac{ga}{a^2 + R^2} \tag{11}$$

$$\lambda_2 = \frac{mgR^2}{a^2 + R^2} \tag{12}$$

Wir integrieren Gleichung (11) für die Anfangsbedingung $\dot{\phi}(0) = 0$:

$$\dot{\phi}(t) = -\frac{ga}{a^2 + R^2}t \tag{13}$$

und erhalten mit Hilfe der Gleichung (9)

$$\lambda_1(t) = -mR(\frac{ga}{a^2 + R^2})^2 t^2 \tag{14}$$

2.2 Perle auf spiralförmigem Draht

Eine Perle der Masse m gleite reibungsfrei auf einer 3-dimensionalen Spirlae. Die Gravitation werde vernachlässigt.
Stelle die Bewegungsgleichung auf.

Lösung:

Die beiden Zwangsbedingungen und die Lagrangegleichung lauten:

$$f_1(z,r,\phi) = \phi - az = 0\ ,\ \ f_2(z,r,\phi) = r - bz = 0 \tag{15}$$
$$\mathscr{L} = T - V = (\frac{m}{2})(\dot{z}^2 + \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) \tag{16}$$
$$\Rightarrow m\ddot{z} = -a\lambda_1 - b\lambda_2 = Z_Z \tag{17}$$
$$m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 = \lambda_2 = Z_r \tag{18}$$
$$m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) = \lambda_1 = Z_\phi \tag{19}$$

2.3 Schiefe Ebene

Eine Scheibe gleite reibungslos unter dem Einfluss der homogenen Schwerkraft $\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_z$ auf einer schiefen Ebene

$$z = ax + by \tag{20}$$

a) Formuliere die Bewegungsgleichungen (Lagrange-Gleichungen 1. Art) unter dieser Zwangsbedingung .
b) Bestimme den Lagrange-Multiplikator λ als Funktion der Koordinaten und Geschwindigkeiten mittels der Bewegungsgleichungen und der Zwangsbedingung.
c) Eliminiere λ aus den Bewegungsgleichungen und gib die Lösungen an.

Lösung:
Die Zwangsbedingungen und die Bewegungsgleichungen lauten:

$$f(x,y,z) = ax + by - z = 0 \tag{21}$$
$$m\ddot{x} = \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda a \tag{22}$$
$$m\ddot{y} = \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda b \tag{23}$$
$$m\ddot{z} = -mg + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} = -mg - \lambda \tag{24}$$

Unter Verwedung $z = ax + by$ in der letzten Gleichung erhält man

$$m\ddot{z} = am\ddot{x} + bm\ddot{y} = (a^2 + b^2)\lambda = -mg - \lambda \tag{25}$$
$$\Rightarrow \lambda = -\frac{mg}{1 + a^2 + b^2} \tag{26}$$

c)

$$m\ddot{x} = -m\frac{ga}{1+a^2+b^2} \tag{27}$$

$$m\ddot{y} = -m\frac{gb}{1+a^2+b^2} \tag{28}$$

$$\Rightarrow \tag{29}$$

$$x(t) = x(0) + \dot{x}(0) - \frac{ga}{1+a^2+b^2}\frac{t^2}{2} \tag{30}$$

$$y(t) = y(0) + \dot{y}(0) - \frac{gb}{1+a^2+b^2}\frac{t^2}{2} \tag{31}$$

$$z(t) = ax(t) + by(t) \tag{32}$$

2.4 Atwoodsche Fallmaschine 1

Berechne die Spannung des Seils, das über die Rolle mit Masse m_2 gelegt ist.
Hinweis: Überlege zunächst, welche der vier Koordniaten x_1,.., x_4 zwangsmäßig als unabhängig anzusehen sind.

Lösung:
Grundsätzlich können wir mit vier unabhängigen Variablen x_1 bis x_4 arbeiten. Zwangsbedingungen und Lagrangefunktion lauten:

$$x_1 + x_2 = const \tag{33}$$

$$(x_3 - x_2) + (x_4 - x_2) = const \tag{34}$$

$$L = \sum_{i=1}^{4}(\frac{m_i}{2}\dot{x}_i^2 - gm_ix_i) \tag{35}$$

Da die Fadenspannung des oberen Seils, die für die Zwangsbedingung (33) verantwortlich ist, nicht gefragt ist, können wir x_2 wegen Gleichung (33) als abhängige Variable ansehen und bzgl x_2 m mit dem Lagrangeformalismus 2. Art arbeiten. Wir erhalten die Lagrangefunktion als Funktion der drei Koordinaten x_1, x_3, x_4 und ihrer Zeitableitungen:

$$\mathscr{L} = \frac{m_1+m_2}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_3}{2}\dot{x}_3^2 + \frac{m_4}{2}\dot{x}_4^2 + g[(m_1-m_2)x_1 + m_3x_3 + m_4x_4] \tag{36}$$

Neben der Lagrangefunktion existiert jetzt nur noch eine Zwangsbedingung:

$$x_3 + x_4 + 2x_1 = const \tag{37}$$

$$\Rightarrow (m_1+m_2)\ddot{x}_1 - g(m_1-m_2) = 2\lambda \tag{38}$$

$$m_3(\ddot{x}_3 - g)) = \lambda \tag{39}$$

$$m_4(\ddot{x}_4 - g)) = \lambda \tag{40}$$

Wir setzten die Zwangsbedingung (37) in Gleichung (40) ein:

$$-m_4(\ddot{x}_3 + 2\ddot{x}_1 + g) = \lambda \tag{41}$$

Aus den Gleichugen (38), (39) und (41) folgt

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_1 - (m_2 + 4\mu_{34})}{m_1 + (m_2 + 4\mu_{34})} g \ mit \mu_{34} = \frac{m_3 m_4}{m_3 + m_4} \tag{42}$$

Die Spannung des Seils beträgt

$$\lambda = \frac{g}{2}[(m_1 + m_2)\frac{m_1 - (m_2 + 4\mu_{34})}{m_1 + (m_2 + 4\mu_{34})} + m_2 - m_1] \tag{43}$$

3 Lagrange Gleichung 2. Art

3.1 Rollpendel

Der Aufhängepunkt m_1 eines ebenen Pendels der Länge l und der Masse m_2 rollt reibungsfrei auf der x-Achse. Stelle die Bewegungsgleichungen auf.

Lösung:

$$\mathscr{L} = T - V = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + mgy_2 \tag{44}$$

$$x_2 = x_1 + l \sin\phi \ , \ y_2 = -l\cos\phi \tag{45}$$

$$\Rightarrow \mathscr{L} = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_1^2 + l^2\dot{\phi}^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\phi}\cos\phi) + mgl\cos\phi \tag{46}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{x}_1} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_1} = (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2 l(\ddot{\phi}\cos\phi - \dot{\phi}^2\sin\phi) = 0 \tag{47}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi} = m_2 l(l\ddot{\phi} + \ddot{x}_1\cos\phi + g\sin\phi) = 0 \tag{48}$$

3.2 Abrutschendes Seil

Ein vollkommen biegsames, homogenes Seil (Gesamtlänge l und Masse ρ pro Längeneinheit) hängt zu einem Teil der Länge a über die Kante eines Tisches. Es wird in dieser Lage zur Zeit t = 0 losgelassen und fängt an, unter dem Einfluss des homogenen Schwerefeldes $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_x$ reibungsfrei über die Tischkante abzugleiten.

a) Betrachte die hängende Länge des Seiles x(t) als generalisierte Koordinate und gib die potentielle und kinetische Energie des Seils an. Stelle die Lagrange-Funktion des Systems $\mathscr{L}(x, \dot{x})$ auf. Die Tischoberfläche liege bei x = 0.
b) Formuliere die Bewegungsgleichung für x(t) und gib die Lösung für den Fall $x(0) = a, \dot{x}(0) = 0$ an.
c) Wie groß ist die Geschwindigkeit des Seils, wenn das hintere Seilende die Tischkante ereicht hat?

Hinweis: Es gilt $cosh^2x - sinh^2x = 1$.
Lösung:

Sei ρ die Seilmasse pro Längeneinheit. Dann gilt:

$$T = \frac{\rho l}{2}\dot{x}^2 \tag{49}$$

$$V = -\rho g \int_0^x x' dx' = -\frac{\rho}{2} g x^2 \tag{50}$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \frac{g}{l}x^2) = 0 \tag{51}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} - \frac{g}{l} = 0 \tag{52}$$

b) Die Lösung der Bewegungsgleichung ist $x(t) = Ae^{\lambda t} + Be^{\lambda t}$ mit $\lambda = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Die Anfangsbedingungen $x(0) = a$ und$\dot{x}(0) = 0$ ergeben:

$$x(t) = a \cosh \lambda t \tag{53}$$

Die Bewegungsgleichung für das abrutschende Seil

$$\ddot{x} = \frac{g}{l}x \tag{54}$$

kann direkt mit der Bewegungsgleichung des harmonischen Osillators

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x \tag{55}$$

verglichen werden. Der wesentliche Unterschied ist das Vorzeichen auf der rechten Seite. Bei Oszillator zieht die Feder die Masse zurück in die Gleichgewichtslage, sodass eine Schwingung entsteht. Beim Seil zieht die Schwerkraft das Seil immer weiter und schneller von der Ausgnagslage weg.

$$x(t) = a \cosh(\sqrt{\frac{g}{l}}t) \tag{56}$$

c) Der Zeitpunkt t_E, bei dem das Seilende die Tischkante erreicht, ist gegeben durch

$$x(t_E) = a \cosh(\sqrt{\frac{g}{l}}t_E) = l \tag{57}$$

Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_E ist gegeben durch

$$\dot{x}(t_E) = \sqrt{\frac{g}{l}}a \sinh(\sqrt{\frac{g}{l}}t_E) = \sqrt{\frac{g}{l}}a\sqrt{\cosh^2(\sqrt{\frac{g}{l}}t_E) - 1} = \sqrt{\frac{g}{l}}a\sqrt{l^2 - a^2} \tag{58}$$

3.3 Abrollender Zylinder

Zwei homogene Zylinder mit Massen m_1, m_2 , Radien r_1, r_2 und Trägheitsmomenten $I_1 = m_1 r_1^2/2$, $I_2 = m_2 r_2^2/2$ sind mit einem Faden umwickelt. Die Achse des Zylinders 1 ist reibungsfrei gelagert. Der Zylinder 2 fällt im Schwerkraftfeld senkrecht nach unten.
Stelle die Bewegungsgleichungen auf und berechne die Fadenspannung.

Lösung:
Zwangsbedingung: $x_2 = const + r_1\phi_1 + r_2\phi_2$

$$\mathscr{L} = \frac{m_1 r_1^2}{4}\dot{\phi}_1^2 + \frac{m_2 r_2^2}{4}\dot{\phi}_2^2 + \frac{m_2}{2}(r_1\dot{\phi}_1^2 + r_2\dot{\phi}_2^2)^2 + m_2 g(r_1\phi_1 + r_2\phi_2) \tag{59}$$

$$\Rightarrow (\frac{m_1}{2} + m_2)r_1\ddot{\phi}_1 + m_2 r_2\ddot{\phi}_2 - m_2 g = 0 \tag{60}$$

$$\frac{3}{2}m_2 r_2\ddot{\phi}_2 + m_2 r_1\ddot{\phi}_1 - m_2 g = 0 \tag{61}$$

$$\Rightarrow \ddot{\phi}_1 = \frac{2m_2 g}{(3m_1 + 2m_2)r_1} \qquad \ddot{\phi}_2 = \frac{2m_1 g}{(3m_1 + 2m_2)r_2} \tag{62}$$

Auf Zylinder 1 wirkt das Drehmoment

$$N = Fr_1 = I_1\ddot{\phi}_1 \tag{63}$$

mit F als Fadenspannung und $I_1 = \frac{m_1}{2}r_1^2$

$$\Rightarrow F = \frac{m_1 m_2}{3m_1 + 2m_2}g \tag{64}$$

3.4 Atwoodsche Fallmaschine 2

In eine Atwoodsche Fallmaschine mit zwei gleichen Massen m, einem masselosen Seil der Länge L und einer masselosen Rolle mit Radius R ist eine Feder mit der Federkonstanten k und Gleichgewichtslänge l eingebaut. Die Massen können sich nur in der Vertikalen bewegen und sind dem Schwerefeld $-g\mathbf{e}_z$ ausgesetzt.

a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion des Systems auf, wobei die Höhen der Massen gegenüber der Rollenachse mit z_1 und z_2 bezeichnet werden.
b) Geben Sie die Bewegungsgleichungen an und bestimmen Sie die allgemeine Lösung.
c) Unter welcher Bedingung enthält die Bewegung beider Massen keinen oszillierenden Anteil?

Lösung:
a) Die Länge der Feder ergibt sich zu

$$s = -z_1 - z_2 + \pi R - L \tag{65}$$

Die Spannenergie der Feder ist damit $E_{Feder} = \frac{k}{2}(s-l)^2$. Mit der neuen Konstanten $L' = L + l - \pi R$ erhalten wir daher

$$\mathscr{L} = \frac{m}{2}\dot{z}_1^2 + \frac{m}{2}\dot{z}_2^2 - mgz_1 - mgz_2 - \frac{k}{2}(z_1 + z_2 + L')^2 \tag{66}$$

b) Die Euler-Lagrange Gleichungen lauten

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{z}_i} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial z_i} \tag{67}$$

$$m\ddot{z}_i = -mg - k(z_1 + z_2 - L') \tag{68}$$

Die Bewegungsgleichungen lauten in Matrixschreibweise mit $u = (z_1, z_2)^t$, $f = (-g - \frac{kL'}{m}, -g - \frac{kL'}{m})^t$ und $A = \frac{k}{m}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\ddot{u} + Au = f \tag{69}$$

A hat die Eigenwerte 0 und $\frac{2k}{m}$ mit Eigenvektoren $u_1 = \frac{1}{2}(1, -1)^t$ und $u_2 = \frac{1}{2}(1, 1)^t$. Damit erhalten wir für die Koordinaten $u_1 = \frac{z_1+z_2}{2}$ und $u_2 = \frac{z_1-z_2}{2}$ das entkoppelte System

$$\ddot{u}_1 = 0 \tag{70}$$

$$\ddot{u}_2 + \frac{2k}{m}u_2 = -g - \frac{kL'}{m} \tag{71}$$

Eine partikuläre Lösung für u_2 erhält man durch den Ansatz $u_2 = const$, sodass sich als allgemeine Lösung ergibt

$$u_1 = c_1 + tc_2 \tag{72}$$

$$u_2 = -\frac{gm}{2k} - L'2 + c_3 \cos(\sqrt{\frac{2k}{m}}t) + c_4 \sin(\sqrt{\frac{2k}{m}}t) \tag{73}$$

Für die Koordinate z_i ergibt sich damit

$$z_1 = c_1 + tc_2 - \frac{gm}{2k} - \frac{L'}{2} + c_3 \cos(\sqrt{\frac{2k}{m}}t) + c_4 \sin(\sqrt{\frac{2k}{m}}t) \tag{74}$$

$$z_2 = -c_1 - tc_2 - \frac{gm}{2k} - \frac{L'}{2} + c_3 \cos(\sqrt{\frac{2k}{m}}t) + c_4 \sin(\sqrt{\frac{2k}{m}}t) \tag{75}$$

Die Integrationskonstanten c_i mit $i \in 1, ..., 4$ ergeben sich aus den Anfangsbedingungen

$$z_1^{(0)} = c_1 + c_3 - \frac{gm}{2k} - L'2 \tag{76}$$

$$z_2^{(0)} = -c_1 - c - 3 - \frac{gm}{2k} - L'2 \tag{77}$$

$$\dot{z}_1^{(0)} = c_2 + c_4\sqrt{\frac{2k}{m}} \tag{78}$$

$$\dot{z}_2^{(0)} = -c_2 + c_4\sqrt{\frac{2k}{m}} \tag{79}$$

insbesonder zu

$$c_3 = \frac{z_1^{(0)} + z_2^{(0)} + \frac{gm}{k} + L'}{2} \tag{80}$$

$$c_4 = (\dot{z}_1^{(0)} + \dot{z}_2^{(0)})\sqrt{\frac{m}{8k}} \tag{81}$$

c) Die Die Bewegung beider Massen enthält keinen oszillierenden Anteil, wenn $C_3 = C_4 = 0$ und somit, wenn gilt

$$-z_1^{(0)} - z_2^{(0)} = \frac{gm}{k} + gL' \tag{82}$$

$$\dot{z}_1^{(0)} = -\dot{z}_2^{(0)} \tag{83}$$

was anschaulich klar ist. Die Feder muss genau die Gleichgewichtslänge im Schwerefeld haben und beide Massen müssen sich mit der selben Geschwindigkeit längs der Fallmaschine bewegen.