Klassische Mechanik - Ferienkurs; Übungen

Sommersemester 2011, Prof. Metzler

Inhaltsverzeichnis

1 Quickies

1) Gegeben sei die Lagrange-Funktion $\mathscr{L} = \frac{1}{2}(R^2\dot{\Theta}^2 + \dot{\phi}^2 R^2 \sin^2\Theta) - mgR\cos\Theta$. Welche Größe ist neben der Energie eine Erhaltungsgröße?

2 Lagrange Gleichung 1. Art

2.1 Perle auf Schraubenlinie

Eine Perle gleite reibungsfrei auf einer Schraubenline mit Radius R. Die Gravitationskraft wirkt in negative z-Richtung. Berechne den Bewegungsablauf und die Zwangskräfte.

2.2 Perle auf spiralförmigem Draht

Eine Perle der Masse m gleite reibungsfrei auf einer 3-dimensionalen Spirlae. Die Gravitation werde vernachlässigt.
Integriere die Bewegungsgleichung und berechne das Zwangsmoment Z_ϕ

2.3 Schiefe Ebene

Eine Scheibe gleite reibungslos unter dem Einfluss der homogenen Schwerkraft $\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_z$ auf einer schiefen Ebene

$$z = ax + by \tag{1}$$

a) Formuliere die Bewegungsgleichungen (Lagrange-Gleichungen 1. Art) unter dieser Zwangsbedingung .
b) Bestimme den Lagrange-Multiplikator λ als Funktion der Koordinaten und Geschwindigkeiten mittels der Bewegungsgleichungen und der Zwangsbedingung.
c) Eliminiere λ aus den Bewegungsgleichungen und gib die Lösungen an.

2.4 Atwoodsche Fallmaschine 1

Berechne die Spannung des Seils, das über die Rolle mit Masse m_2 gelegt ist.
Hinweis: Überlege zunächst, welche der vier Koordniaten x_1,.., x_4 zwangsmäßig als unabhängig anzusehen sind.

3 Lagrange Gleichung 2. Art

3.1 Rollpendel

Der Aufhängepunkt m_1 eines ebenen Pendels der Länge l und der Masse m_2 rollt reibungsfrei auf der x-Achse. Stelle die Bewegungsgleichungen auf.

3.2 Abrutschendes Seil

Ein vollkommen biegsames, homogenes Seil (Gesamtlänge l und Masse ρ pro Längeneinheit) hängt zu einem Teil der Länge a über die Kante eines Tisches. Es wird in dieser Lage zur Zeit t = 0 losgelassen und fängt an, unter dem Einfluss des homogenen Schwerefeldes $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$ reibungsfrei über die Tischkante abzugleiten.

a) Betrachte die hängende Länge des Seiles s(t) als generalisierte Koordinate und gib die potentielle und kinetische Energie des Seils an. Stelle die Lagrange-Funktion des Systems $\mathscr{L}(x, \dot{x})$ auf. Die Tischoberfläche liege bei x = 0.
b) Formuliere die Bewegungsgleichung für x(t) und gib die Lösung für den Fall $x(0) = a, \dot{x}(0) = 0$ an.
c) Wie groß ist die Geschwindigkeit des Seils, wenn das hintere Seilende die Tischkante ereicht hat?

Hinweis: Es gilt $cosh^2x + sinh^2x = 1$.

3.3 Abrollender Zylinder

3.4 Atwoodsche Fallmaschine 2

In eine Atwoodsche Fallmaschine mit zwei gleichen Massen m, einem masselosen Seil der Länge L und einer masselosen Rolle mit Radius R ist eine Feder mit der Federkonstanten k und Gleichgewichtslänge l eingebaut. Die Massen können sich nur in der Vertikalen bewegen und sind dem Schwerefeld $-g\mathbf{e}_z$ ausgesetzt.

a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion des Systems auf, wobei die Höhen der Massen gegenüber der Rollenachse mit z_1 und z_2 bezeichnet werden.
b) Geben Sie die Bewegungsgleichungen an und bestimmen Sie die allgemeine Lösung.
c) Unter welcher Bedingung enthält die Bewegung beider Massen keinen oszillierenden Anteil?

Zwei homogene Zylinder mit Massen m_1, m_2 , Radien r_1, r_2 und Trägheitsmomenten $I_1 = m_1 r_1^2/2$, $I_2 = m_2 r_2^2/2$ sind mit einem Faden umwickelt. Die Achse des Zylinders 1 ist reibungsfrei gelagert. Der Zylinder 2 fällt im Schwerkraftfeld senkrecht nach unten.
Stelle die Bewegungsgleichungen auf und berechne die Fadenspannung.

In eine Atwoodsche Fallmaschine mit zwei gleichen Massen m, einem masselosen Seil der Länge L und einer masselosen Rolle mit Radius R ist eine Feder mit der Federkonstanten k und Gleichgewichtslänge l eingebaut. Die Massen können sich nur in der Vertikalen bewegen und sind dem Schwerefeld $-g\mathbf{e}_z$ ausgesetzt.

a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion des Systems auf, wobei die Höhen der Massen gegenüber der Rollenachse mit z_1 und z_2 bezeichnet werden.
b) Geben Sie die Bewegungsgleichungen an und bestimmen Sie die allgemeine Lösung.
c) Unter welcher Bedingung enthält die Bewegung beider Massen keinen oszillierenden Anteil?