Klassische Mechanik - Ferienkurs; Übungen

Sommersemester 2011, Prof. Metzler

Inhaltsverzeichnis

1 Quickies

1) Geben Sie die Corioliskraft an, die in einem mitbewegten Bezugssystem auf einer mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Scheibe wirkt.

Lösung:

$$\mathbf{F}_C = 2mv\vec{\omega} \tag{1}$$

2) Wie lassen sich Zentrifugalkraft $\mathbf{F}_Z = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r})$ und Trägheitskraft der Rotationsbeschleunigung $\mathbf{F}_{rot} = -m\dot{\vec{\omega}} \times \mathbf{r}$ durch Beobachtung im mitbewegten Bezugssystem unterscheiden?

Lösung:
F_{rot} ist stets senkrecht auf r, während $F_Z \cdot r$ nur verschwindet, wenn bereits $F_Z = 0$. Zu beachten ist allerdings, dass im lokalen Bezugssystem normalerweise r nicht bekannt ist, so dass dies nicht zur experimentellen Trennung der beiden Kräfte herangezogen werden kann.
3) Welche Kraft ist nötig, um einen Wagen der Masse $m = 3,1\ 10^4 kg$, der sich mit der Geschwindigkeit $v = 200km/h$ bewegt, auf einer Kreisbahn mit Radius $R = 5,0km$ zu halten?

Lösung:

$$\omega = \frac{v}{R} \tag{2}$$

und damit

$$F = |\mathbf{F}_Z| = m\,|\omega(\omega \times r)| = m\frac{v^2}{R} = 19kN \tag{3}$$

4) Ein Körper gleite reibungslos in der x-y-Ebene auf einer rotierenden Scheibe vom Zentrum zum Rand. In welche Richtung wird der Körper durch die Corioliskraft im mit der Scheibe mitgedrehten Koordinatensystem abgedrangt, falls sich die Scheibe (von oben gesehen) im Uhrzeigersinn dreht?

Lösung:

$$\vec{\omega} = -\omega\mathbf{e}_z\ ,\ \mathbf{v} = v\mathbf{e}_r\ ,\ F_C = -2m(\vec{\omega} \times \mathbf{v}) = 2mv\omega e_\phi \Rightarrow links \tag{4}$$

2 Keplerproblem

Berechne die geometrische Bahn $r(\phi)$ für das wichtigste Zentralkraftpotential, das Keplerpotential $V(r) = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r} = -\frac{\alpha}{r}$.

$$\phi(r) = \pm \int \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{2m\alpha}{Lr} - \frac{1}{r^2}}} \tag{5}$$

Wir substituieren $u = \frac{1}{r}$ und erhalten

$$\phi(u) = \mp \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{2m\alpha}{L}u - u^2}} \tag{6}$$

mit Hinweis ergibt sich das Integral zu

$$\phi(u) = \phi_0 \pm \arccos \frac{-\frac{L^2}{m\alpha} + 1}{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}} \tag{7}$$

Auflösen nach $r = u^{-1}$ liefert:

$$\frac{1}{r(\phi)} = \frac{m\alpha}{L^2}[1 - \sqrt{1 + \frac{2Ep_\phi^2}{m\alpha^2}} \cos(\phi - \hat{\phi}_0)] \tag{8}$$

Mit

$$p := \frac{p_\phi^2}{m\alpha} \quad \epsilon := \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \tag{9}$$

und mit $\phi_0 := \hat{\phi}_0 + \pi$ lautet die Bahngleichung

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}[1 + \epsilon \cos(\phi - \phi_0)] \tag{10}$$

Dies ist die Gleichung eines Kegelschnittes, dessen einer Brennpunkt im Koordinatenursprung und daher im Kraftzentrum liegt. Der Winkel ϕ_0 kennzeichnet da Perihel.

3 Effektives Potential

3.1 Keplerpotential

Untersuche das effektive Potential des Keplerproblems.

Lösung:

Drei Fälle sind zu unterscheiden:

- $E = E_1 \geq 0$: Ein Teilchen, das auf das Kraftzentrum zuläuft hat die Geschwindigkeit

$$\dot{r} = -\sqrt{\frac{2}{m}[E - V_{eff}(r)]} \tag{11}$$

  Im Punkt r_1 kommt die Radialbewegung zur Ruhe, das Teilchen kehrt um und läuft ins Unendliche.
  Der Abstand r_1 wird nicht unterschritten, da die kinetische Energie nicht negativ werden kann. Lediglich für $L = 0$ stürtzt das Teilchen ins Kraftzentrum.

- $E_3 < E < 0$: Die Bahn ist finit und beschriebt einen gebundenen Zustand; das Teilchen läuft zwischen den beiden Umkehrpunktenr_1' und r_2' hin und her. Allerdings könne wir hier nicht feststellen, ob die Bewegung offen oder geschlossen ist oder ob die Bahn ein ellipsenförmiges oder andersartiges Aussehen hat.

- $E = E_3 = -\frac{m\alpha^2}{2L^2}$: Die Gesamtenergie E ist gleich dme Minimum von $V_{eff}(r)$.
  Die kinetische Energie $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$ der Radialbewegung verschwindet. Die Bahn bildet einen Kreis mit Radius r_0. Der Radius r_0 ergibt sich aus

$$\frac{dV_{eff}(r)}{dr}_{r_0} = 0 \tag{12}$$

$$zu \tag{13}$$

$$r_0 = \frac{L^2}{m\alpha} \tag{14}$$

3.2 Lineares Potential

Untersuche das effektive Potential eines linearen Potentials.

Lösung:

$$V_{eff}(r) = \gamma r + \frac{L^2}{2mr^2} \tag{15}$$

hat an der Stelle

$$r_0 = (\frac{L^2}{m\gamma})^{\frac{1}{3}} \tag{16}$$

das absolute Minimum

$$V_{eff}^{min} = \frac{3}{2}(\frac{\gamma^2 L^2}{m})^{\frac{1}{3}} \tag{17}$$

Zwei Bahntypen sind zu unterscheiden:

- $E = E_1 > V_{eff}^{min}$: Das Teilchen läuft zwischen den Umkehrpunkten r_1 und r_2 hin und her.

- $E = E_2 = V_{eff}^{min}$: Es liegt eine Kriesbewegung mit $r = r_0$ vor

4 Beschleunigtes Bezugssystem; Corioliskraft

In der horizontalen Ebene rotiert ein gerader Draht um den Koordinatenursprung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω . Auf dem Draht gleitet reibungsfrei eine Perle.
Die Perle wird durch die Rotation nach außen geschleudert, wobei ihre kinetische Energie immer stärker ansteigt. Diskutiere die Ursache des Energiegewinnes in einem rotierenden Koordinatensystem, dessen x' Achse auf dem Draht liegt.

Lösung:

Der Draht muss offensichtlich auf die Perle eine Kraft $\mathbf{F}_D$ ausüben, die eine Arbeit verrichtet. Wir bestimmen F_D mit der Bewegungsgleichug für ein rotierendes System:

$$m\mathbf{a'} = \mathbf{F}_D - 2m\vec{\omega} \times \mathbf{v'} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}) \tag{18}$$

$$mx\mathbf{e}'_1 = \mathbf{F}_D - 2m\vec{\omega} \times \dot{x}\mathbf{e}'_1 - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (x\mathbf{e}'_1)) = \mathbf{F}_D - 2m\omega\dot{x}\mathbf{e}'_2 + m\omega^2 x'\mathbf{e}_1^2 \tag{19}$$

Da $\mathbf{F}_D$ in y' Richtung zeigt, ist die Gleichung nur richtig für

$$m\ddot{x}' = m\omega^2 x' \tag{20}$$

$$\mathbf{F}_D = 2m\omega\dot{x}\mathbf{e}'_2 = \mathbf{F}_{Coriolis} \tag{21}$$

Der Draht fängt die Corioliskraft ab. Da der von der Perle zurückgelegte Weg eine Komponente in y' Richtung gat, leistet F_D eine Arbeit, die gleich dem Energiegewinn der Perle ist.

5 $\frac{1}{r^2}$ Potential

Betrachte die Bewegung eines Massepunktes der Masse m im Potential

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r^2} \tag{22}$$

(a) Skizziere das effektive Potential für die Fälle
i) $L^2 > 2m\alpha, E > 0$ und
ii) $L^2 < 2m\alpha, E > 0$

(b) Bestimme in beiden Fällen aus (a) jeweils die radiale Koordinate r als Funktion des Winkels ϕ sowie die Zeit t als Funktion von r . Welche Bewegung führt der Massepunkt aus?

Hinweis: $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = arcsin(\frac{x}{a})$

Lösung:
Als effektives Potential bezeichnet man diejenige Funktion $V_{eff}(r)$, die den winkelabhängigen Anteil

der kinetischen Energie und die potentielle Energie vereint. Für ein Zentralpotential ergibt sich mit Polarkoordinaten in der Ebene der Bewegung

$$E = E_{kin} + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \tag{23}$$

wobei wir benutzt haben, dass $L = mr^2\varphi$ erhalten ist.
(a) Für das gegebene Potential gilt konkret

$$V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r^2} = (\frac{L^2}{2m} - \alpha)\frac{1}{r^2} \tag{24}$$

Es ergibt sich also wieder ein $\frac{1}{r^2}$ -Potential mit i) positivem bzw. ii) negativem Vorfaktor.
(b) Erhaltungssätze stellen oft einen einfacheren Weg zur Lösung eines Problems dar als die Bewegungsgleichungen, welche stets zweiter Ordnung sind. Der Energieerhaltungssatz lautet

$$const. = E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + (\frac{L^2}{2m} - \alpha)\frac{1}{r^2} \tag{25}$$

und liefert einen Zusammenhang zwischen $\dot{r}$ und r ohne weitere Ableitungen.

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m}E - (\frac{L^2}{m^2} - \frac{2\alpha}{m})\frac{1}{r^2}) \tag{26}$$

i) Gleichung 26 kann durch Trennung der Variablen integriert werden, um t als Funktion von r zu erhalten. Da wir nur an Zeitdifferenzen interessiert sind, lassen wir das Integral unbestimmt.

$$t(r) = \pm \int \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}E - (\frac{L^2}{m^2} - \frac{2\alpha}{m})\frac{1}{r^2})}} dx \tag{27}$$

Der Integrand vereinfacht sich durch Einführung von $b = \frac{L^2 - 2m\alpha}{2mE}$ zu

$$t(r) = \pm\sqrt{\frac{m}{2E}} \int \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b}{x^2}}} dx = \pm\sqrt{\frac{m}{2E}} r\sqrt{1 - \frac{b}{r^2}} = \pm\frac{1}{E}\sqrt{\frac{m}{2}}\sqrt{Er^2 + \alpha - \frac{L^2}{2m}} \tag{28}$$

Um $\phi(r)$ zu berechnen, verwenden wir Drehimpulserhaltung und drücken $\frac{d\phi}{dt}$ mit Hilfe der Kettenregel durch $\frac{dr}{d\phi}$ aus.

$$const = L = mr^2\dot{\phi} = mr^2\frac{d\phi}{dr}\dot{r} \tag{29}$$

woraus wir mit 26 einen Zusammenhang zwischen $\frac{d\phi}{dr}$ und r ohne weitere Ableitungen.

$$l\frac{dr}{d\phi} = \pm r^2\sqrt{2mE - (L^2 - 2m\alpha)\frac{1}{r^2})} \tag{30}$$

Auf diese Weise erhalten wir wieder eine Differentialgleichung, die wir durch Trennung der Variablen integrieren können, wobei das Vorzeichen von $\dot{r}$ noch festgelegt werden muss. Wir erhalten für den Winkel

$$\phi(r) = \pm \int_{r_0}^{r} \frac{L}{x^2\sqrt{2mE - (L^2 - 2m\alpha)\frac{1}{x^2})}} \tag{31}$$

wobei wir eine Integrationskonstante r_0 in Form der Integralgrenze eingeführt und $\phi(r_0) = 0$ gesetzt haben. Der Integrand vereinfacht sich durch Einführung der charakteristischen Länge $a = \sqrt{\frac{L^2-2m\alpha}{2mE}}$ zu

$$\phi(r) = \pm \frac{L}{\sqrt{2me}} \int_{r_0}^{r} \frac{1}{x^2\sqrt{7}1 - \frac{a^3}{x^2}} dx \tag{32}$$

Durch die Substitution mit der dimensionslosen Variable $u = \frac{a}{x}$, $\frac{du}{dx} = -\frac{a}{x^2}$ bringen wir das Integral in die Form des Arcussinus-Integrals aus dem Hinweis. Für $r < a$ ist der Integrand komplex, wir wählen daher die Integrationskonstante am unteren Rand des zulässigen Bereichs $r_0 = a$, was gleichzeitig das positive Vorzeichen fixiert, und erhalten

$$\phi(r) = -\frac{L}{a\sqrt{2mE}} \int_{1}^{\frac{a}{r}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \frac{L}{a\sqrt{2mE}} (\frac{\pi}{2} - \arcsin(\frac{a}{r})) \tag{33}$$

Invertieren dieser Beziehung ergibt

$$r = \frac{a}{sin(\frac{\pi}{2} - \frac{a\sqrt{2mE}}{L}\phi)} = \frac{a}{cos(\frac{a\sqrt{2me}}{L}\phi)} = \frac{\sqrt{\frac{L^2-2m\alpha}{2mE}}}{\cos\phi\sqrt{1-\frac{2m\alpha}{L^2}}} \tag{34}$$

ii) Die analoge Umformung zu Fall i) mit der charakteristischen Länge $a = \sqrt{\frac{2m\alpha-L^2}{2mE}}$ ergibt, wobei wir hier $r_0 \to \infty$ wählen und daher das negative Vorzeichen wählen müssen,

$$\phi(r) = \frac{L}{a\sqrt{2mE}} int_0^{\frac{a}{r}} \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} du = \frac{L}{a\sqrt{2mE}} \frac{a}{r} \tag{35}$$

Invertieren der Beziehung ergibt

$$r = \frac{\sqrt{\frac{2m\alpha-L^2}{2mE}}}{\sinh\phi\sqrt{\frac{2m\alpha}{L^2}-1}} \tag{36}$$

Im Fall i) kann sich der Massepunkt dem Ursprung nur bis auf nähern und läuft dann nach $r \to \infty$. Im Fall ii) fällt der Massepunkt auf einer Spiralbahn ins Zentrum. Dabei läuft er beginnend beim Abstand r unendlich oft um $(\phi \to \infty)$, erreicht den Ursprung aber nach endlicher Zeit

$$\delta t = \frac{1}{E}\sqrt{\frac{m}{2}}(\sqrt{Er^2 + \alpha - \frac{L^2}{2m}} - \sqrt{\alpha - \frac{L^2}{2m}}) \tag{37}$$