Klassische Mechanik - Ferienkurs; Lösungen

Sommersemester 2011, Prof. Metzler

Inhaltsverzeichnis

1 Quickies

1. Wie lautet die Bewegungsgleichung eines Fadenpendels der Länge l und der Masse m im Schwerefeld $-g\mathbf{e}_z$ der Erde?

Lösung:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} sin\varphi = 0 \quad \varphi << 1 \ \rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} = 0 \tag{1}$$

2. Ein Tennisball springt elastisch auf einer horizontalen Platte. Wie hängt die Periode der Bewegung von der maximalen Höhe h_{max} ab, die der Ball erreicht?

Lösung:
Die Fallzeit T_F von maximaler Höhe lautet $h_m ax = \frac{1}{2} g T_F^2 \;\; \Rightarrow \;\; T_F = \sqrt{2h_{max}/g}$. Für die Periode erhält man: $T = 2T_F$

3. Ein Massepunkt m sei durch zwei Federn der Federkonstante k mit zwei Wänden verbunden. Die Federn sein auf einer Linie. Betrachte kleine Auslenkungen des Massepunktes aus der Gleichgewichtslage entlang der Verbindungslinie und gib die Eigenfrequenz an.

Lösung:

$$m\ddot{x} = -kx - kx = -2kx, \;\Rightarrow\; \omega = \sqrt{\frac{2k}{m}} \tag{2}$$

4. Begründe die Kleinwinkelnäherung $x \approx sinx \approx tanx$.

Lösung:
Die Taylorentwicklung lauten

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \mp ... \quad , \quad \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 \tag{3}$$

2 Harmonischer Oszillator

Stelle die Bewegungsgleichung für den gedämpften harmonischen Oszillator auf und finde die Lösungen der Bewegungsgleichung.
Lösung:
Bewegungsgleichungen sind jedoch häufig Differentialgleichungen 2. Ordnung und benötigen deshalb ein anderes Lösungsverfahren. Lösungen solcher DGLs 2. Ordnung setzen sich folgendermaßen zusammen:

$$x(t) = x_{hom}(t) + x_{part}(t) \tag{4}$$

2.0.1 Lösung - homogene Gleichung

Allgemeiner Ansatz für die homogene Gleichung $\ddot{x} + 2\kappa\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$:

$$x_{hom} = ce^{-i\nu t} \tag{5}$$

Daraus folgt die Gleichung $-\nu^2 - 2i\kappa\nu + \omega_0^2 = 0$, mit den beiden Lösungen

$$\nu_{1,2} = \pm\sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2} - i\kappa \tag{6}$$

Es sei $\omega^2 := \omega_0^2 - \kappa^2$
Ab hier ergibt sich folgende Fallunterscheidung:

- 1.Fall: $\omega > \kappa$; gedämpfte periodische Bewegung
- 2.Fall: $\omega < \kappa$; aperiodischer Kriechfall
- 3.Fall: $\omega = \kappa$; aperiodischer Grenzfall

1.Fall: $\omega > \kappa$

$$x_{hom} = c_1 e^{-\kappa t + i\omega t} + c_2 e^{-\kappa t - i\omega t} = e^{-\kappa t}((c_1 + c_2)\cos(\omega t) + (c_1 - c_2)i\sin(\omega t)) \tag{7}$$

Eine physikalisch relevante Lösung enthält keinen Imaginärteil, darum muss $(c_1 - c_2)$ imaginär $(c_1 + c_2)$ reell sein. Mit $a = c_1 + c_2$, $b = i(c_1 - c_2)$; $a, b \in \Re$ ist x_{hom} :

$$x_{hom} = e^{-\kappa t}(acos(\omega t) + bsin(\omega t)) = de^{-\kappa t}cos(\omega t + \alpha) \tag{8}$$

2.Fall: $\omega < \kappa$

$$x_{hom} = ge^{\kappa_1} + he^{\kappa_2} \tag{9}$$

mit $\kappa_{1,2} = \kappa \pm \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}$.
3.Fall: $\omega = \kappa$

Da ν_1, ν_2 entartet sind, lautet die Lösung:

$$x_{hom}(t) = (A + Bt)e^{-\kappa t} \tag{10}$$

3 Lösung - inhomogene Gleichung; partikuläre Lösung

x_{part} erhält man aus der Variation der Konstanten:
Jede beliebige Kraft lässt sich mittels Fouriertransformation in periodische Bestandteile zerlegen, weshalb es ausreicht, externe Kräfte der Form $f(t) = f_\omega \cos(\omega t)$ zu betrachten.
Gleichwertig dazu ist die Verwendung von $e^{i\omega t}$ anstelle des $cos(\omega t)$, wenn am Ende der Rechung wieder der Realteil des Ergebnisses als Lösung betrachtet wird.

4 Gekoppelter Oszillator

Die Bewegung zweier durch eine Feder (Federkonstante k, Gleichgewichtslänge l) verbundene Massen m_1 und $m_2 < m_1$ seien auf die z-Achse, welche gleich der Symmetrieachse ist eingeschränkt. Das System falle zunächst frei aus der Höhe h (Abstand der unteren Masse zum Boden) im homogenen Schwerefeld g, wobei die beiden Massen stets den Abstand l behalten und die größere Masse unten ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ stoße die untere Masse am Boden total elastisch auf (instantane Umkehr der Geschwindigkeit). Nimm an, dass genau ein Stoß mit dem Boden stattfindet.
a) Formuliere die Bewegungsgleichungen für die Koordinaten der Massen z_1 und z_2 für $t > 0$.
b) Führe die Schwerpunkts- und Relativkoordinate ein $z_S = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}$ $z_R = z_2 - z_1$ und gib die Bewegungsgleichungen dafür an.
c) Gib die Anfangswerte für z_S, z_R und die Geschwindigkeiten $\dot{z}_S$, $\dot{z}_R$ unmittelbar nach dem Stoß bei $t = 0$ an und bestimme die zugehörige Lösung der Bewegungsgleichungen.
d) Wie hoch steigt der Schwerpunkt des Systems nach dem Stoß? Benutzen Sie die Energieerhaltung in der Schwerpunktsbewegung.

Lösung:

a) An den beiden Massen greift jeweils die Schwerkraft und die Federkraft an

$$m_1 \ddot{z_1} = -m_1 g + k(z_2 - z_1 - l) \tag{11}$$
$$m_2 \ddot{z_2} = -m_2 g - k(z_2 - z_1 - l) \tag{12}$$

b) Durch Linearkombination der Gleichungen aus a) erhalten wir

$$\ddot{z_S} = -g \tag{13}$$
$$\ddot{z_R} = -k(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2})(z_2 - z_1 - l) = -\frac{k}{\mu}(z_R - l) \tag{14}$$

wobei wir die reduzierte Masse $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ eingeführt haben.
c) Der Betrag der Gescheindigkeit v des Systems unmittelbar vor dem Stoß ergibt sich aus der Energieerhaltung

$$E_{pot} = m_1 g h + m_2 g(h + l) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + m_2 g l = E'_{kin} + E'pot \tag{15}$$
$$v = \sqrt{2gh} \tag{16}$$

Daraus ergeben sich die Anfangsbedingungen unmittelbar nach dem Stoß bei $t = 0$ $z_1(0) = 0, z_2(0) = l, \dot{z}_1(0) = v, \dot{z}_2 = -v$, sowie für Schwerpunkts und Relativkoordinate: $z_S(0) = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}, z_R(0) = l, \dot{z}_S(0) = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v, \dot{z}_R = -2v$.
Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen für die Relativkoordinate ergibt sich aus der partikulären Lösung aus dem Ansatz $z_R = const.$ und der Schwingung

$$z_R = l + c_1 \cos \sqrt{\frac{k}{\mu}} t + c_2 \sin \sqrt{\frac{k}{\mu}} t \tag{17}$$

wobei $c_1 = z_R(0) - l$ und $c_2 \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \dot{z}_R(0)$ gilt. Die zu den bestimmten Anfangsbedingungen gehörige Lösung lautet daher

$$z_S = \frac{m_2 l}{m_1+m_2} + \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}vt - \frac{1}{2}gt^2 z_R = l - 2v\sqrt{\frac{\mu}{k}}\sin\sqrt{k}\mu t \tag{18}$$

d) Bei $t = 0$ bestitz der Schwerpunkt die Geschwindigkeit $\dot{z}_S(0) = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v$, wobei sich m_1 bei $z_1 = 0$ und m_2 bei $z_2 = l$ befindet. Die Energieerhlatung liefert für die maximale Steighöhe h_max daher

$$E'_{pot} + E'_{kin} = E''_{pot} \tag{19}$$

$$m_2 gl + \frac{1}{2}\frac{(m_1-m_2)^2}{m_1+m_2}v^2 = (m_1+m_2)gh_{max} \tag{20}$$

$$h_{max} = \frac{\mu}{m_1}l + h(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2})^2 = \frac{\mu}{m_1}l + h(1 - \frac{4\mu}{m_1+m_2}) \tag{21}$$

5 Tunnel

Zwischen zwei Städten soll ein 500 km langer Tunnel gegraben werden, in dem Züge verkehren. Ein solcher Zug bewege sich reibungslos unter dem Einfluss der Schwerkraft $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$. Betrachte die Erde als eine ideale Kugel mit Radius $R = 6400$ km.
a) Formuliere die Bewegungsgleichung für $x(t)$ im Falle $L << R, |\mathbf{g}| = g = const.$
b) Gib die Lösung der Bewegungsgleichung an.
c) Wie lange dauert die Fahrt durch den gesamten Tunnel für einen Zug mit Anfangsgeschwindigkeit $\mathbf{v}_0 = 0$
d) Wie groß ist die mittlere und maximale Geschwindigkeit des Zuges?

Lösung:
a) Die Bewegungsgleichung für x(t) lautet

$$m\ddot{x} = F_x = -mg\sin\alpha \tag{22}$$

wobei α der Winkel zwischen dem Radiusvektor und der y- Achse ist. Es gilt

$$\tan\alpha = \frac{x}{\sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}}} \tag{23}$$

Im Falle $|x| \leq L << R$ erhält man

$$\tan\alpha \approx \frac{x}{R} \approx \sin\alpha, \quad \ddot{x} = -\frac{g}{R}x \tag{24}$$

b) Die Lösung der Oszillatorgleichung lautet

$$x(t) = x(0)\cos\omega t + \dot{x}(0)\frac{\sin\omega t}{\omega}, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{R}} \tag{25}$$

c) Im Falle $\dot{x}(0) = 0$ ist die Fahrzeit gleich der Halbperiode

$$T_F = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 0,7h \tag{26}$$

d) Die mittlere Geschwindigkeit $\overline{v}$ und die maximale Geschwindigkeit v_{max} lauten

$$\overline{v} = \frac{L}{T_F} = 714km/h \quad v_{max} = \frac{L\omega}{2} = \frac{L\pi}{2T_F} = 1120km/h \tag{27}$$