

FERIENKURS EXPERIMENTALPHYSIK 4

2010

Probeklausur - Musterlösung

1 Allgemeine Fragen

- a) Welche Relation muss ein Operator erfüllen damit die dazugehörige Observable eine Erhaltungsgröße darstellt?
- b) Was versteht man unter Luminosität und was ist ihre Einheit?
- c) Was versteht man unter der Heisenbergschen Unschärferelation für Ort und Impuls?
- d) Wie werden Bosonen und Fermionen definiert und was besagt das Pauli-Prinzip?
- e) Erklären Sie die Quantenzahlen n , l , m . Welche Rolle spielen sie im Wasserstoffatom ohne Berücksichtigung von Korrekturen?
- f) Was versteht man allgemein unter einem Satz von guten Quantenzahlen? Was sind die guten Quantenzahlen für ein einfaches, wasserstoffähnliches Atom ohne und mit Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung?
- g) Sie haben bei der Führung am CERN nicht aufgepasst und Ihnen ist leider entgangen, ob an einem Streuexperiment identische Bosonen oder Fermionen aufeinander geschossen werden. Glücklicherweise sehen Sie ein Diagramm, welches die Detektorzählrate der elastischen Streuung in Abhängigkeit des Streuwinkels zeigt und finden dies raus. Wie?
- h) Nennen Sie mindestens zwei Gründe, weshalb stationäre Zustände in der Quantenmechanik eine so wichtige Rolle spielen.
- i) Was ist die Bedeutung der Wellenfunktion in der Quantenmechanik?
- j) Wie lauten die Auswahlregeln für elektrische Dipolübergänge?
- k) Wie lauten die Energie-Eigenwerte E_n des eindimensionalen harmonischen Oszillators im stationären Zustand?
- l) Was versteht man unter entarteten Energieniveaus?

Sie sollten für die Beantwortung der Fragen nicht zu viel Zeit aufwenden. Kurze und prägnante Antworten reichen!

Lösung

- a) Eine quantenmechanische Observable A ist eine Erhaltungsgröße wenn der dazugehörige Operator mit dem Hamiltonoperator kommutiert, also wenn $[\hat{H}, \hat{A}] = 0$ gilt.
- b) Die Luminosität ist das Produkt aus der Teilchenstromdichte und der Anzahl der im Strahl stehenden Streuzentren. Sie hat also dieselbe Einheit wie die Teilchenstromdichte: $\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$.
- c) Die Heisenbergsche Unschärferelation lautet

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar$$

Sie besagt, dass Ort und Impuls nicht gleichzeitig exakt bestimmbar sind.

- d) Bosonen sind Teilchen mit ganzzahligem Spin. Fermionen sind Teilchen mit halbzahligem Spin. Das Pauli-Prinzip besagt, dass die Fermionen-Vielteilchen-Zustandsfunktion unter Austausch zweier Teilchen antisymmetrisch sein muss.
- e) Die Quantenzahl $n = 1, 2, \dots$ ist die Hauptquantenzahl. Sie bestimmt die Energiezustände.
Die Quantenzahl $l = 0, 1, \dots, n - 1$ ist die Drehimpulsquantenzahl. Mit ihr lässt sich der Betrag des Drehimpulses über $|\mathbf{L}| = \hbar\sqrt{l(l+1)}$ bestimmen.
Die Quantenzahl $m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$ ist die magnetische Quantenzahl. Sie bestimmt die z -Komponente des Drehimpulses über $L_z = \hbar m$.
- f) Gute Quantenzahlen sind immer mit Erhaltungsgrößen verbunden. Für wasserstoff-ähnliche Systeme ohne Spin-Bahn-Kopplung sind n, l, m_l und m_s gute Quantenzahlen. Berücksichtigt man die Spin-Bahn-Kopplung ist m_j an Stelle von m_l und m_s eine gute Quantenzahl da \mathbf{l} und \mathbf{s} um \mathbf{j} präzedieren.
- g) Für identische Teilchen ist die Wahrscheinlichkeit P ein Teilchen im Detektor nachzuweisen durch

$$P(\theta) = |f(\theta) \pm f(\pi - \theta)|^2$$

gegeben. Das '+' gilt für Bosonen, das '-' gilt für Fermionen. Unter einem Streuwinkel von $\theta = 90^\circ$ verschwindet für Fermionen die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilchen in den Detektor gelangt. Ist die Detektorzählrate also unter diesem Winkel Null, so handelt es sich um Fermionen, ansonsten um Bosonen.

- h) 1. Die stationären Zustände sind die Energie-Eigenzustände, d.h. die Zustände mit scharfer Energie. Sind sie bekannt, dann kann man aus der Wellenfunktion des Systems die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Energie-Messwerte berechnen.
2. Die stationären Zustände haben eine einfache Zeitentwicklung: Multiplikation mit dem Phasenfaktor $e^{-iE_n t/\hbar}$. Durch Entwicklung nach den stationären Zuständen kann man die zeitliche Entwicklung eines beliebigen Zustandes berechnen.

- i) Die Wellenfunktion enthält alle Information über das betrachtete quantenmechanische System. Das Absolutquadrat der Ortswellenfunktion ergibt die Aufenthaltswahrscheinlichkeit(-sdichte) eines Teilchen.
- j) Die Auswahlregeln lauten: $\Delta l = \pm 1$, $\Delta m_{l,j} = 0, \pm 1$, $\Delta s = 0$, $\Delta m_s = 0$, $\Delta j = 0, \pm 1$ ($j = 0 \nrightarrow j = 0$).
- k) Die Energie-Eigenwerte lauten $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$.
- l) Entartete Energieniveaus sind verschiedene Zustände mit gleicher Energie in quantenmechanischen Systemen.

2 Potentialmulde

Gegeben sei eine rechteckförmige Potentialmulde der Breite $b > 0$ und der Tiefe $-V_0$ mit $V_0 > 0$

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ (Bereich I)} \\ -V_0 & 0 < x < b \text{ (Bereich II)} \\ 0 & x > b \text{ (Bereich III)} \end{cases}$$

Eine ebene Materiewelle (Energie $E > 0$, Masse m) treffe von links auf diese Potentialmulde. Der Betrag des Wellenvektors in den drei Bereichen soll mit k_I , k_{II} bzw. k_{III} bezeichnet werden.

- a) Die Energie E des Teilchens sei nun fest vorgegeben. Berechnen Sie die Muldentiefe V_0 in Abhängigkeit der Energie E , so dass gilt: $k_{II} = 4k_I$.
- b) Die Muldentiefe erfüllt nun die Bedingung aus a) (d.h. $k_{II} = 4k_I$). Geben Sie für alle drei Bereiche I, II und III die zugehörigen, resultierenden Ortswellenfunktionen $\phi_I(x)$, $\phi_{II}(x)$ und $\phi_{III}(x)$ mit allgemeinen Amplitudenkoeffizienten an.
Hinweis: Verwenden Sie für die ebene Teilchenwelle die komplexe Schreibweise und überlegen Sie, welche Wellenkomponenten in den jeweiligen Bereichen auftreten.
- c) Stellen Sie die Gleichungen auf, welche die Ermittlung der Amplitudenkoeffizienten aus b) erlauben.
- d) Betrachten Sie nun zusätzlich den Spezialfall $\lambda_I = b/2$, wobei λ_I die Materiewellenlänge im Bereich I bezeichnet. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit T , mit der das Teilchen die Potentialmulde überwindet.

Lösung

a) Für die Beträge der Wellenvektoren gilt

$$k_{\text{I}} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE} \equiv k_{\text{III}}$$
$$k_{\text{II}} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E + V_0)}$$

Quadriert man die Bedingung $k_{\text{II}} = 4k_{\text{I}}$, so ergibt sich $V_0 = 15E$.

b) In Bereich I und II besteht die Ortswellenfunktion $\phi_{\text{I,II}}(x)$ aus einer einfallenden und einer reflektierten Welle. In Bereich II besteht die Ortswellenfunktion ϕ_{III} nur aus einer transmittierten Welle. Mit der Bedingung aus a) erhält man somit

$$\phi(x) = \begin{cases} Ae^{ik_{\text{I}}x} + Be^{-ik_{\text{I}}x} & x < 0 \\ Ce^{4ik_{\text{I}}x} + De^{-4ik_{\text{I}}x} & 0 < x < b \\ Ee^{ik_{\text{I}}x} & x > b \end{cases}$$

c) Aus der Anschluss- und Stetigkeitsbedingung an der Stelle $x = 0$ ergibt sich

$$A + B = C + D$$
$$A - B = 4(C - D)$$

Aus der Anschluss- und Stetigkeitsbedingung an der Stelle $x = b$ ergibt sich

$$Ce^{4ik_{\text{I}}b} + De^{-4ik_{\text{I}}b} = Ee^{ik_{\text{I}}b}$$
$$4(Ce^{4ik_{\text{I}}b} - De^{-4ik_{\text{I}}b}) = Ee^{ik_{\text{I}}b}$$

d) Die Transmissionswahrscheinlichkeit T ist das Betragsquadrat des Amplitudenkoeffizienten E der transmittierten Ortswellenfunktion ϕ_{III} . Wählt man o.B.d.A. den Koeffizienten $A = 1$ und verwendet die Beziehung

$$k_{\text{I}} = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{I}}} = \frac{4\pi}{b}$$

so erhält man aus den Gleichungen aus c)

$$B = C + D - 1$$
$$5C - 3D = 2$$
$$C + D = E$$
$$4(C - D) = E$$

Daraus ergibt sich $C = 10/16$, $D = 6/16$ und somit $E = 1$.

Damit erhält man für die Transmissionswahrscheinlichkeit

$$T = |E|^2 = 1$$

Die einfallende Welle wird also vollständig transmittiert. Dies passiert immer wenn die Breite einer Potentialmulde (o.a. Barriere) einem Vielfachen der de-Broglie-Wellenlänge entspricht.

3 Zeemann-Effekt

Der atomare Übergang $7^3S_1 \rightarrow 6^3P_2$ in Quecksilber entspricht einer Wellenlänge von $\lambda = 546.10 \text{ nm}$.

- Welcher Zeeman-Effekt liegt vor, der normale, oder der anomale?
- Berechnen Sie die Landé-Faktoren g_j der beiden Zustände und bestimmen Sie die Aufspaltung des Levels 6^3P_2 Levels, wenn das 7^3S_1 Level mit $\Delta E = 3 \cdot 10^{-5} \text{ eV}$ aufspaltet.
- Skizzieren Sie ein Termschema, dass diese Aufspaltung zeigt und zeichnen Sie die mit der Auswahlregel $\Delta m_j = 0, \pm 1$ erlaubten Übergänge ein.

Lösung

- Es liegt der anomale Zeeman-Effekt vor, da neben einem Bahndrehimpuls auch ein nichtverschwindender Spin existiert.
- Die Aufspaltung eines Levels auf Grund des anomalen Zeeman-Effekts ist mit

$$E = -\vec{\mu}_j \cdot \vec{B} = m_j g_j \mu_B B$$

gegeben. Der Landé-Faktor ist dabei definiert durch

$$g_j = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}$$

Das Level 7^3S_1 ist im Zustand $j = 1, l = 0, s = 1$. Damit folgt für g_j :

$$g_j(^3S_1) = 2.$$

Für das Level 6^3P_2 gilt $j = 2, l = 1, s = 1$ und somit:

$$g_j(^3P_2) = \frac{3}{2}.$$

Für den Energieunterschied zweier benachbarter Level gilt

$$\Delta E = g_j \mu_B B.$$

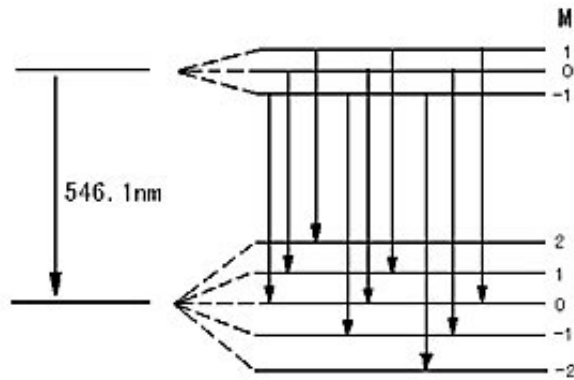
Damit können wir das angelegte Magnetfeld aus der Aufspaltung des 7^3S_1 Levels berechnen:

$$B = \frac{\Delta E}{g_j(^3S_1)\mu_B} = 0.25 \text{ T.}$$

Damit folgt für die Größe der Aufspaltung eines 6^3P_2 -Niveaus

$$\Delta E = 2.16 \cdot 10^{-5} \text{ eV.}$$

- c) Zeichnet man die 2 Level des 7^3S_1 -Niveaus und die 5 Level des 6^3P_2 -Niveaus ein, so kommt man auf folgendes Bild:



4 Hyperfeinstruktur

Wie groß ist das durch das $1s$ -Elektron am Ort des Protons ($I = 1/2$, $g_I = 5.58$) im Wasserstoffatom verursachte Magnetfeld, wenn die Hyperfeinstruktur ($\lambda = 21 \text{ cm}$) im $1s$ -Zustand durch die beiden Einstellungen des Kernspins erklärt wird?

Lösung Die Energie für die Hyperfeinstruktur ist gegeben durch

$$E_F = E_{nlj} + \frac{A}{2} [F(F+1) - j(j+1) - I(I+1)].$$

Der $1s$ -Zustand spaltet dabei in die zwei Niveaus, $F = 1$ und $F = 0$, auf, die Energiedifferenz der beiden ergibt sich zu

$$\Delta E = E(F = 0) - E(F = 1) = A,$$

wobei die Hyperfeinstrukturkonstante A durch

$$A = \frac{g_I \mu_K B_j}{\sqrt{j(j+1)}}$$

definiert ist. Diese Differenz entspricht nun der angegebenen Linie. Löst man dies nach dem gesuchten Magnetfeld auf, so erhält man

$$B_j = \frac{\Delta E \sqrt{j(j+1)}}{g_I \mu_K} = \frac{hc \sqrt{j(j+1)}}{\lambda g_I \mu_K} = 29.1 \text{ T.}$$

5 Betazerfall von Tritium

Beim β^- -Zerfall zerfällt in einem Atomkern ein Neutron in ein Proton, ein Elektron und ein Elektronantineutrino ($n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$). Ein radioaktives Tritiumatom ${}^3\text{H}$ wandelt sich durch den Betazerfall in ein ${}^3\text{He}^+$ -Ion um. Die Wellenfunktion des Hüllenelektrons, das sich vor dem Zerfall im Grundzustand befindet, bleibe beim Zerfall ungestört. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P , dass sich das Hüllenelektron des ${}^3\text{He}^+$ -Ions bei einer Messung im 1s-Zustand befindet? In einem wasserstoffähnlichen Atom lautet die Wellenfunktion für ein Elektron im Grundzustand

$$\psi_Z = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} e^{-\frac{Zr}{a_0}}$$

Folgendes Integral könnte hilfreich sein

$$\int_0^{\infty} dr \, r^n e^{-ar} = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

Lösung:

Vor dem Zerfall befindet sich das Elektron im Grundzustand ϕ des Tritiumatoms. Die Kernladungszahl beträgt $Z = 1$. Es gilt also

$$\phi = \psi_{Z=1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{a_0} \right)^{3/2} e^{-\frac{r}{a_0}}.$$

Nach dem Zerfall befindet sich das Elektron weiterhin im Zustand ϕ , der nun allerdings nicht mehr der Grundzustand des Heliumions ($Z = 2$) ist, denn der Grundzustand von ${}^3\text{He}^+$ lautet

$$\psi_{Z=2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{a_0} \right)^{3/2} e^{-\frac{2r}{a_0}}.$$

Wir suchen nun also den Koeffizienten der Projektion von $\psi_{Z=2}$ auf $\phi = \psi_{Z=1}$. Die Wahrscheinlichkeit das Elektron im 1s-Zustand zu finden beträgt dann

$$\begin{aligned} P &= |\langle \psi_{Z=2} | \psi_{Z=1} \rangle|^2 = \left| \int d^3r \psi_{Z=1}^* \psi_{Z=2} \right|^2 = \left| \int_0^\infty dr 4\pi r^2 \psi_{Z=1}^* \psi_{Z=2} \right|^2 \\ &= \left| 4 \left(\frac{2}{a_0^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty dr r^2 e^{-\frac{3r}{a_0}} \right|^2 = \left(\frac{16\sqrt{2}}{27} \right)^2 \approx 0.702 \end{aligned}$$

6 Helium

- Skizzieren Sie das Energiespektrum von Helium bis zu den F-Zuständen. Erklären Sie die Nomenklatur der vorkommenden Zustände. Beobachtet man beim Para-Helium eine Feinstruktur? Auf welche Spinkopplung kann man deshalb beim Para-Helium folgern?
- Welche Hauptquantenzahl hat der niedrigste Energiezustand der beiden Konfigurationen? Warum gibt es keinen 1^3S_1 -Zustand?
- Zeichnen Sie in das Energiespektrum bis zu den F-Zuständen alle möglichen optischen Dipolübergänge ein.

Lösung:

- Energiespektrum siehe Mittwochsvorlesung. Vollständige Nomenklatur für Terme oder Energiezustände von Atomen:

$$n^{2S+1}L_J$$

mit Hauptquantenzahl n , Multiplizität $2S + 1$, Buchstabensymbol für Gesamtbahndrehimpuls L und Quantenzahl J für den gesamten Drehimpuls des Atoms. Im Para-Helium beobachtet man im Gegensatz zu Ortho-Helium keine Feinstruktur (alle Linien sind einfach), da die beiden Spins der Elektronen antiparallel sind und sich deshalb vektoriell zu $S = 0$ zusammensetzen.

Generell liegen die Triplett-Zustände niedriger in der Energie als die Singulett-Zustände, weil wegen der symmetrischen Ortswellenfunktion die positive Coulomb-Wechselwirkung für die Triplett-Zustände kleiner ist.

- b) Hauptquantenzahlen der niedrigsten Energiezustände: Para-Helium: 1^1S_0 (Elektronenkonfiguration: $(1s)^2$) Ortho-Helium: 2^3S_1 (Elektronenkonfiguration: $(1s)^1(2s)^1$). Der Zustand 1^3S_1 mit Elektronenverteilung $(1s)^2$ fehlt bei Ortho-Helium wegen des Pauliverbots. Quantenzahlen der beiden Elektronen: $n_1 = n_2$, $l_1 = l_2$, $s_1 = s_2 = 1/2$. Quantenzahlen für das Atom: $L = 0$, $S = 1$ und damit $m_{s1} = m_{s2}$, $J = 1$. Beide Elektronen würden in diesem Fall in allen Quantenzahlen übereinstimmen.
- c) Siehe Mittwochsvorlesung. Es gibt keine optischen Übergänge von Ortho- zu Para-Helium, denn Übergänge mit $\Delta s = 1$ sind verboten (kein Spinflip).

7 Mehrelektronenatome

- a) Betrachten Sie die Konfiguration $1s^2 2s^2 2p 3d$ von Kohlenstoff und bestimmen Sie die spektroskopischen Symbole $^{2S+1}L_J$, in die diese durch Coulomb-Abstoßung der Elektronen und Spin-Bahn-Kopplung zerfällt. Welche Dimension hat die Konfiguration?
- b) Die Grundzustandskonfiguration von zweifach ionisiertem Europium Eu^{2+} ist $[\text{Xe}]4f^7$. Bestimmen Sie gemäß den Hund'schen Regeln das $^{2S+1}L_J$ -Symbol des Grundzustands von Eu^{2+} . In wie viele Zeeman-Komponenten spaltet der Grundzustand auf, wenn man ein schwaches B -Feld anlegt und durch welche Quantenzahl werden die Zeeman-Komponenten charakterisiert?
- c) Geben Sie die vollständige Liste der spektroskopischen Symbole $^{2S+1}L_J$ an, von denen aus ein elektrischer Dipolübergang in den Grundzustand von Eu^{2+} möglich ist. (Die Paritätsauswahlregel braucht nicht berücksichtigt zu werden)

Lösung:

- a) Die gegebene Konfiguration $1s^2 2s^2 2p 3d$ ist von der Form $[\dots]n_1l_1n_2l_2$, wobei $[\dots]$ für vollständig besetzte Orbitale steht. In diesem Fall gilt:

$$L = |l_1 - l_2|, \dots, |l_1 + l_2|, \quad S = 0, 1, \quad J = |L - S|, \dots, L + S.$$

Wir haben $l_1 = 1, l_2 = 2$, also ergibt sich folgendes Schema:

$$\begin{aligned}
 {}^1P, J = 1 &\rightarrow {}^1P_1 \\
 {}^3P, J = 0, 1, 2 &\rightarrow {}^3P_0, {}^3P_1, {}^3P_2 \\
 {}^1D, J = 2 &\rightarrow {}^1D_2 \\
 {}^3D, J = 1, 2, 3 &\rightarrow {}^3D_1, {}^3D_2, {}^3D_3 \\
 {}^1F, J = 3 &\rightarrow {}^1F_3 \\
 {}^3F, J = 2, 3, 4 &\rightarrow {}^3F_2, {}^3F_3, {}^3F_4.
 \end{aligned}$$

Die Dimension jedes Spektroskopischen Symbols ist durch $2J+1$ gegeben. Addiert man alle auf, dann erhält man

$$d = 3 + 1 + 3 + 5 + 5 + 3 + 5 + 7 + 7 + 5 + 7 + 9 = 60$$

als Dimension der gesamten Konfiguration

- b) Es sind 7 Elektronenspins auf $2 \cdot 3 + 1 = 7$ Orbitale zu verteilen. Die Hund'schen Regeln führen auf das Bild

$m_l = 3$	2	1	0	-1	-2	-3
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑

Also

$$S = \frac{7}{2}, L = 0.$$

Weitere Anwendung der Hund'schen Regeln liefert

$$J = L + S = \frac{7}{2}.$$

Insgesamt also:

$$S = \frac{7}{2}, L = 0, J = \frac{7}{2} \rightarrow {}^8S_{7/2}.$$

Beim Anlegen eines schwachen B -Feldes spaltet dies in $2J + 1 = 8$ Zeeman-Komponenten auf, die durch Werte von $m_J = -\frac{7}{2}, \dots, \frac{7}{2}$ durchnummeriert werden.

c) Der Endzustand hat

$$S = \frac{7}{2}, L = 0, J = \frac{7}{2}.$$

Aus den Auswahlregeln für elektrische Dipolstrahlung folgt dann für den möglichen Anfangszustand:

$$\begin{aligned}\Delta S = 0 &\rightarrow S' = \frac{7}{2} \\ \Delta L = \pm 1 &\rightarrow L' = 1 \\ \Delta J = \pm 1 &\rightarrow J' = \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}.\end{aligned}$$

Es gibt also 6 mögliche spektroskopische Symbole für den Anfangszustand:

$$\begin{aligned}{}^8S_{5/2}, {}^8S_{7/2}, {}^8S_{9/2} \\ {}^8P_{5/2}, {}^8P_{7/2}, {}^8P_{9/2}.\end{aligned}$$

8 Lithiummoleküle

Lithium kommt als zwei Isotopen vor, ${}^6\text{Li}$ und ${}^7\text{Li}$, mit jeweils 3 Protonen und 3 bzw. 4 Neutronen. Der Gleichgewichtsabstand r_0 in den Molekülen H^6Li und H^7Li sei gleich groß. Die Frequenz ν entspreche dem Übergang zwischen den Rotationszuständen $j = 1$ und $j = 0$. Experimentell wird zwischen beiden Molekülsorten ein Frequenzunterschied $\Delta\nu$ von $\Delta\nu = \nu(\text{H}^6\text{Li}) - \nu(\text{H}^7\text{Li}) = 10^{10}$ Hz beobachtet. Die Moleküle sollen als starre Rotatoren betrachtet werden.

- Berechnen Sie den Gleichgewichtsabstand r_0 .
- Berechnen Sie für beide Molekülsorten die Energie des Übergangs von $j = 1$ nach $j = 0$.

Lösung:

- Die Energie E_j eines Rotationsniveaus mit der Drehimpulsquantenzahl j berechnet sich über

$$E_j = \frac{\hbar^2}{2I} j(j+1),$$

mit $j = 0, 1, 2, \dots$ und dem Trägheitsmoment I des Moleküls

$$I = \mu r_0^2 = \frac{m_{\text{H}} \cdot m_{\text{Li}}}{m_{\text{H}} + m_{\text{Li}}} r_0^2.$$

Die Frequenz des Übergangs zwischen den Niveaus mit den Quantenzahlen $j = 0$ und $j = 1$ beträgt somit

$$h\nu_{1 \rightarrow 0} = \Delta E_{1 \rightarrow 0} = E(j = 1) - E(j = 0) = \frac{\hbar^2}{I} \Rightarrow \nu_{1 \rightarrow 0} = \frac{\hbar^2}{hI} = \frac{\hbar}{2\pi I}.$$

Aus dem Frequenzunterschied zwischen Molekülen H^6Li und H^7Li kann der Gleichgewichtsabstand r_0 berechnet werden:

$$\Delta\nu = \nu_6 - \nu_7 = \frac{\hbar}{2\pi r_0^2} \left(\frac{1}{\mu_6} - \frac{1}{\mu_7} \right) \Rightarrow r_0^2 = \frac{\hbar}{2\pi \Delta\nu} \left(\frac{1}{\mu_6} - \frac{1}{\mu_7} \right).$$

Mit μ_6 und μ_7 den jeweiligen reduzierten Massen folgt

$$r_0 = 1.55 \text{ \AA}$$

b) Einsetzen in

$$E_j = \frac{\hbar^2}{2I} j(j + 1)$$

liefert:

$$E_6 = 2.02 \text{ meV}$$

$$E_7 = 1.98 \text{ meV}$$