Ferienkurs Experimentalphysik II Elektro- und Thermodynamik

Übung zur Thermodynamik Teil II
Musterlösung

12. September 2011

Michael Mittermair

Aufgabe 1

Ein Mol eines idealen Gases expandiert von Volumen V_1 auf ein Volumen $V_2 = e \cdot V_1$. Die Expansion erfolgt isotherm und quasi-statisch. Bestimme die Wärmemenge, die währen des Prozesses vom Gas aufgenommen wird.

Lösung 1

Für ein ideales Gas gilt $U = \frac{3}{2} N k_B T$, für $T = const$ folgt $\Delta U_{12} = 0$ und damit aus dem ersten Hauptsatz

$$0 = \Delta Q_{12} + \Delta W_{12}$$
$$\rightarrow \Delta Q_{12} = -\Delta W_{12}$$

mit der Gasgleichung ergibt sich dann

$$\Delta W_{12} = -\int\limits_1^2 p dV = -N k_B T \int\limits_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} =$$
$$=\text{-Nk}_B T ln(\frac{V_2}{V_1}) = -N k_B T ln(e) = -N k_B T$$

und somit für die Wärme

$$\Delta Q12 = N k_B T = \nu R T = R T$$

Aufgabe 2

Leiten Sie aus dem ersten Hauptsatz, der idealen Gasgleichung und den molaren Wärmekapazitäten c_p und c_V mit dem Abdiabatenkoeffizienten $\kappa = \frac{c_p}{c_V}$ die Adiabatengleichungen $PV^\kappa = const$ und $TV^{\kappa-1} = const$ für adiabatische Zustandsänderungen her.

Lösung 2

Als erstes berechnet man des Adiabatenkoeffizienten

$$\kappa = \frac{c_p}{c_V} = \frac{\frac{f+2}{2}}{\frac{f}{2}}$$

Die Änderung ist adiabatisch $\rightarrow \dot{Q} = 0$
Aus dem ersten Hauptsatz ergibt sich damit

$$dU = \nu c_V dT = -pdV = \delta W$$

Mit den allgemeinen Formeln für die Wärmekapazitäten $c_p = \frac{f+2}{2}R$ und $c_V = \frac{f}{2}R$ und der idealen Gasgleichung folgen dann

$$\frac{f}{2}\frac{dT}{T} = -\frac{dV}{V}$$

und durch Integration

$$ln\left(\frac{T}{T_0}\right)^{f/2} = -ln\left(\frac{V}{V_0}\right)^{-1}$$

T_0 und V_0 sind Konstanten, die durch die Integration zustande gekommen sind.
Durch Umstellen der Gleichung erhält man

$$T^{f/2}V = T_0^{f/2}V_0 = const.$$

Ersetzt man T dann wieder mithilfe der Gasgleichung bekommt man

$$\frac{p^{f/2}V^{f/2+1}}{\nu R} = const.$$

$$\mathrm{pV}^{\frac{f/2+1}{f/2}=const.}$$

$$\mathrm{pV}^{\kappa} = const.$$

Aufgabe 3

Ein Physikstudent hat gelernt, dass bei jeder Temperaturangleichung eines heißen mit einem kalten System die Unordnung der Welt zunimmt.
Seither hat er beim Kaffeetrinken ein schlechtes Gewissen, wenn er kalte Milch hinzugibt. Er will nun wissen, wie viel Entropie er pro Kaffee erzeugt, um zu entscheiden, ob er das mit seinem Gewissen vereinbaren kann.

a)

Wie viel Entropie erzeugt der Student also, wenn er 200ml Kaffee (200ml 90C warmes Wasser) mit 50 ml Milch (50 ml 5C warmes Wasser) mischt? Zur Vereinfachung wird angenommen, dass der Wärmestrom $\dot{Q}$ vom Kaffee in die Milch zeitlich konstant und die Temperaturangleichung nach einer bestimmten Zeit Δt abgeschlossen ist.

b)

Welchen unter Umständen noch größeren Entropieerzeugungsprozess hat der Student vergessen?

Lösung 3

a)

Um die durch Wärmefluss erzeugte Entropie zu ermitteln, berechnen wir zuerst die Mischungstemperatur von Kaffee und Milch.
Da wir Milch und Kaffee als System ohne jegliche Außenwelt betrachten, findet nur ein Wärmeübertrag von Milch in den Kaffee Q_{MK} und einer vom Kaffee in die Milch Q_{KM} statt. Es gilt der erste Hauptsatz

$$\begin{aligned} 0 = \Delta U = Q_{Gesamt} &= Q_{MK} + Q_{KM} \\ \mathrm{m}_K c_W (T_K - \bar{T}) &= -m_M c_W (T_M - \bar{T}) \\ \bar{T} &= \frac{T_K + T_M m_M}{m_K + m_M} \approx 346.2K \end{aligned}$$

So haben wir die Mischtemperatur $\bar{T}$ und den Wärmeübertrag
$Q = Q_{KM} = -Q_{MK} = 14212J$
Um die Zunahme bzw. die Abnahme der Entropie berechnen zu können, modellieren wir den Temperaturangleichvorgang durch den linearen Wärmefluss

$$\bar{Q} = \frac{Q_{KM}}{\Delta t}$$

Damit folgen für die Temperaturen von Kaffee und Milch während des Ausgleichprozesses

$$\begin{aligned} T_K(t) &= \frac{\bar{T} - T_K}{\Delta} t \cdot t + T_K \\ \mathrm{T}_M(t) &= \frac{\bar{T} - T_M}{\Delta} t \cdot t + T_M \end{aligned}$$

Nun kann die jeweilige Entropieänderung mit Hilfe des zweiten Hauptsatzes $\bar{S} = \dfrac{\bar{Q}}{T}$ berechnet werden.

$$\bar{S}_K(t) = -\frac{|Q|}{(\bar{T} - T_K) \cdot t + T_K \Delta t}$$

$$\Delta S_K = \int_0^{\Delta t} \bar{S}_K(t)dt = -\frac{|Q|}{(\bar{T} - T_K)} ln\frac{\bar{T}}{T_K}$$
$$_M(t) = -\frac{|Q|}{(\bar{T} - T_M) \cdot t + T_M \Delta t}$$
$$\Delta S_K = \int_0^{\Delta t} \bar{S}_M(t)dt = \frac{|Q|}{(\bar{T} - T_M)} ln\frac{\bar{T}}{T_M}$$

Für die gesamte Entropie ergibt sich dann

$$\Delta S = \Delta S_M + \Delta S_K = |Q| \cdot \left(\frac{ln\frac{\bar{T}}{T_M}}{(\bar{T} - T_M)} - \frac{ln\frac{\bar{T}}{T_K}}{(\bar{T} - T_K)} \right) \approx 5.6\frac{J}{K}$$

Die Entropieänderung ist von der Zeit unabhängig, was die Linearisierung des Wärmeübergangs rechtfertigt.

b)

Der Student hat bei dieser quantitativen Rechnung nicht bedacht, dass auch das Vermischen zweier verschiedener Flüssigkeiten ein irreversibler Prozess ist, der nach dem zweiten Hauptsatz die Entropie erhöht.

Aufgabe 4

Betrachtet werde eine Klimaanlage, die nach dem Prinzip eines linksläufigen Carnotschen Kreisprozesses betrieben wird. Der Carnotprozess arbeitet dabei zwischen einem kalten und einem heißen Reservoir mit den Temperaturen T_k und T_h. Je nach Jahreszeit arbeitet die Klimaanlage als Wärmepumpe oder als Kältemaschine.
Hinweis: Bedenken sie, dass die Isothermen eines Carnotprozesses recht gut mit einem T-S-Diagramm betrachtet werden können.
Wie groß ist die Leistungsziffer $\varepsilon = \frac{Q_{aus}}{W_{ges}}$ für eine Heizung ($T_h = 298K$, $T_n = 268K$)?
Wie groß ist $\varepsilon_0 = \frac{Q_{ein}}{W_{ges}}$ für die Raumkühlung im Sommer($H_h = 313K$, $T_n = 298K$)?

Lösung 4

Es handelt sich um einen Kreisprozess, deshalb gilt

$$\Delta U = 0 = Q_{ein} + Q_{aus} - Wges$$

Der Carnotprozess stellt im T-S-Diagramm ein Rechteck dar. Die Integrationen entlang der Isothermen kann also sehr einfach durchgeführt werden.

$$Q_aus = \int_{S_h}^{S_n} T_h dS = T_h \cdot (S_n - S_h)$$
$$\mathrm{Q}_e in = \int_{S_n}^{S_h} T_n dS = T_n \cdot (S_h - S_n)$$

Die Arbeit ergibt sich als Differenz der beiden bzw. entspricht sie der eingeschlossenen Fläche

$$W_{ges} = (T_n - T_h) \cdot (S_h - S_n)$$

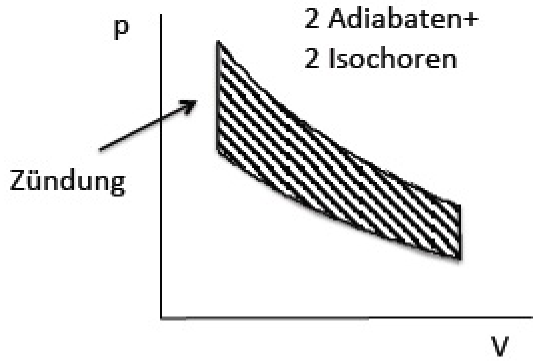
Damit kann man direkt die Leistungkoeffizienten bestimmen

$$\varepsilon = \frac{Q_{aus}}{W_{ges}} = \frac{T_h}{T_h - T_n} = 9.9$$
$$\varepsilon_0 = -\frac{Q_{ein}}{W_{ges}} = \frac{T_n}{T_h - T_n} = 19.9$$

Aufgabe 5

Der Ottomotor ist eine Wärme-Kraft-Maschine, deren Kreislauf aus einer adiabatischen Kompression, einer isochoren Erhitzung, einer adiabatischen Expansion und einer isochoren Abkühlung besteht. Wie sieht der Modell-Kreisprozess für den Ottomotor im P-V-Diagramm aus?
Wie groß ist sein Wirkungsgrad η in Abhängigkeit der Temperaturen T_1, T_2, T_3 und T_4.
Wie groß das Verdichtungsverhältnis $\varepsilon = \dfrac{V_1}{V_2}$ und wie hängt der Wirkungsgrad davon ab?

Lösung 5



Für den Wirkungsgrad gilt

$$\eta = \frac{W_{ges}}{Q_{ein}} = \frac{Q_{ein} + Q_{aus}}{Q_{ein}} = 1 + \frac{Q_{aus}}{Q_{ein}}$$

Die Wärmetransfers geschehen während den isochoren Schritten. Da sich das Volumen während dieser Schritte nicht ändert, gilt für die Wärme jeweils

$$Q_{ein} = \nu \cdot c_V \cdot (T_3 - T_2)$$
$$\mathrm{Q}_{aus} = \nu \cdot c_V \cdot (T_1 - T_4)$$

Der Wirkungsgrad ist damit

$$\eta_{Otto} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$$

Da es sich zwischen den Punkten 2 und 3 bzw. 4 und 1 jeweils um einen isochoren Schritt handelt, gilt $V_2 = V_3$ und natürlich $V_4 = V_1$ gibt es nur ein einziges Volumenverhältnis ε

Mit einer Form des Adiabatengesetzes $TV^{\kappa-1} = const.$ folgt dass $T_2V_2^{\kappa-1} = T_1V_1^{\kappa-1} = T_1V_2^{\kappa-1}$ und $T_4V_4^{\kappa-1} = T_3V_3^{\kappa-1} = T_3V_2^{\kappa-1}$ Woraus für den Wirkungsgrad folgt

$$\eta_{Otto} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{(\frac{V_2}{V_1})^{\kappa-1}T_3 - T_1}{T_3 - (\frac{V_1}{V_2})^{\kappa-1}T_1} =$$

$$=1- \frac{\frac{V_2}{V_1})^{\kappa-1} \cdot (T_3 - \frac{V_1}{V_2})^{\kappa-1}T_1}{T_3 - (\frac{V_2}{V_1})^{\kappa-1}T_1}$$

$$\rightarrow \eta_{Otto} = 1 - \varepsilon^{1-\kappa}$$

Je höher die Verdichtung ist, umso effizienter arbeitet also der Motor. In der Realität will man das Klopfen eines Motors, also die Selbstentzündung durch zu hohe Kompression, verhindern.