Ferienkurs Experimentalphysik II
Thermodynamik Grundlagen - Lösungen

Lennart Schmidt

08.09.2011

Aufgabe 1:
Berechnen Sie den Volumenausdehnungskoeffizienten

$$\alpha = \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial T}\Big|_p \tag{1}$$

für das ideale Gas.

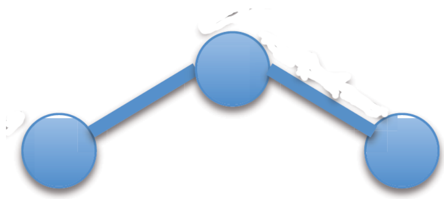
Lösung:

Zustandsgleichung des idealen Gases:

$$pV = nRT \tag{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{p}{nRT}\frac{nR}{p} = \frac{1}{T}\ . \tag{3}$$

Aufgabe 2:
Wie viele Freiheitsgrade besitzt das abgebildete Molekül?



Lösung:

Der Schwerpunkt hat 3 Translationsfreiheitsgrade $\rightarrow\ f_{trans} = 3$.
Entlang der beiden Verbindungen können jeweils Vibrationen (Schwingungen der Atome relativ zueinander) auftreten. Diese liefern jeweils 2 Freiheitsgrade (Abstand zwischen den Atomen und Geschwindigkeit der Schwingung mittels potentieller und kinetischer

Energie) $\rightarrow$ $f_{vib} = 2 \cdot 2 = 4$.
Es kann zudem zu einer Biegeschwingung kommen, die auch wieder 2 Freiheitsgrade hat $\rightarrow$ $f_{biege} = 2$.
Zuletzt gibt es noch 3 Rotationsfreiheitsgrade $\rightarrow$ $f_{rot} = 3$.

Das macht insgesamt

$$f_{ges} = 12 \ . \tag{4}$$

Aufgabe 3:
Berechnen Sie die kritische Temperatur T_c und das kritische Volumen V_c der Van-der-Waals Gleichung

$$\left(p + \frac{a\nu^2}{V^2}\right)(V - b\nu) = \nu RT \ . \tag{5}$$

Lösung:

Zunächst muss die Van-der-Waals Gl. (5) so umgestellt werden, dass Sie den Druck als Funktion des Volumens angibt

$$p(V) = \frac{\nu RT}{(V - b\nu)} - \frac{a\nu^2}{V^2} \ . \tag{6}$$

Der kritische Punkt ist dadurch definiert, dass die entsprechende Isotherme mit T_c bei (V_c, p_c) einen Sattelpunkt hat. Daher leiten wir Gl. (6) zweimal nach V ab und setzen beide Ableitungen gleich Null:

$$\frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{\nu RT}{(V - b\nu)^2} + 2\frac{a\nu^2}{V^3} = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} = \frac{2\nu RT}{(V - b\nu)^3} - 6\frac{a\nu^2}{V^4} = 0 \ . \tag{8}$$

Die erste Gleichung kann nach T aufgelöst werden:

$$T_c = \frac{2a\nu}{R}\frac{(V_c - b\nu)^2}{V_c^3} \ . \tag{9}$$

Dies eingesetzt in die zweite Gleichung liefert V_c,

$$V_c = 3b\nu \ . \tag{10}$$

Dies widerrum eingesetzt in Gl. (9) ergibt

$$T_c = \frac{8a}{27bR} \ . \tag{11}$$

Aufgabe 4:
Berechnen Sie C_V und C_p des idealen Gases in Abhängigkeit von der Anzahl der Freiheitsgrade f.

Lösung:

Mit

$$C_V = \frac{1}{\nu}\frac{\partial U}{\partial T}\Big|_V \tag{12}$$

und dem Äquipartitionstheorem $U = \nu f RT/2$ erhält man für die Wärmekapazität bei konstantem Volumen

$$C_V = \frac{1}{\nu}\frac{f}{2}R\nu = \frac{f}{2}R\ . \tag{13}$$

Mit

$$C_p = \frac{1}{\nu}\frac{\partial Q}{\partial T}\Big|_p = \frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\Big|_p + p\frac{\partial V}{\partial T}\Big|_p\right) \tag{14}$$

und der idealen Gasgleichung $pV = \nu RT$ erhält man für die Wärmekapazität bei konstantem Druck

$$C_p = \frac{f+2}{2}R\ . \tag{15}$$

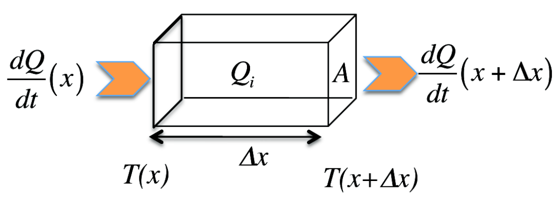
Aufgabe 5:
Leiten Sie unter Verwendung des Fourier'schen Gesetzes,

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\lambda A\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\ , \tag{16}$$

die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c\rho}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{17}$$

her. Betrachten Sie dazu die untenstehende Abbildung und drücken Sie $\mathrm{d}Q_i/\mathrm{d}t$ zum einen durch $\mathrm{d}Q(x)/\mathrm{d}t$ und $\mathrm{d}Q(x+\Delta x)/\mathrm{d}t$ aus und zum anderen durch die Wärmekapazität und die zeitliche Änderung der Temperatur. Entwickeln Sie $dQ(x+\Delta x)/dt$ bis zur linearen Ordnung in Δx.



Lösung:

Die Änderung von Q_i ist zum einen gegeben durch

$$\frac{\mathrm{d}Q_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}(x) - \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}(x+\Delta x) \tag{18}$$

und zum anderen kann sie mittels der Definition der spezifischen Wärme als

$$\frac{\mathrm{d}Q_i}{\mathrm{d}t} = c\rho A \Delta x \frac{\partial T}{\partial t} \tag{19}$$

ausgedrückt werden, wobei ρ die Massendichte bezeichnet. Das Fourier'sche Gesetz besagt, dass

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}(x) = -\lambda A \frac{\partial T}{\partial x} \tag{20}$$

gilt. Entwickeln wir nun $\mathrm{d}Q(x+\Delta x)/\mathrm{d}t$ bis zur ersten Ordnung in Δx,

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}(x+\Delta x) \approx \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}(x) + \Delta x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}(x) = -\lambda A \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\Delta x \right) , \tag{21}$$

so erhält man

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c\rho}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} . \tag{22}$$

Aufgabe 6:
Die Solarkonstante $I_{SE} = 1.37 \mathrm{kW/m^2}$ gibt die Intensität der Sonnenstrahlung am Ort der Erde an. Die Entfernung Erde-Sonne beträgt $R_{SE} \approx 150 \times 10^6 \mathrm{km}$ und der Radius der Sonne ist $R_S \approx 7 \times 10^5 \mathrm{km}$. Welche Temperatur T_S hat die Oberfläche der Sonne, wenn Sie annehmen, dass es sich um einen schwarzen Strahler handelt?

Lösung:

Nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz ist die Gesamtstrahlungsleistung pro Fläche eines schwarzen Strahlers der Temperatur T_S gegeben durch

$$I_S = \sigma T_S^4 . \tag{23}$$

Aufgrund der Energieerhaltung muss die Strahlungsleistung, die durch eine Kugeloberfläche mit Radius R_{SE} und Mittelpunkt im Sonnenmittelpunkt P_{SE} gleich sein der von der Sonne abgestrahlten Leistung P_S:

$$P_{SE} = I_{SE} \cdot 4\pi R_{SE}^2 = I_S \cdot 4\pi R_S^2 = P_S . \tag{24}$$

Umstellen nach I_S liefert

$$I_S = I_{SE}\frac{R_{SE}^2}{R_S^2} = \sigma T_S^4 \ , \tag{25}$$

woraus

$$T_S = \left(\frac{I_{SE}}{\sigma}\frac{R_{SE}^2}{R_S^2}\right)^{1/4} \tag{26}$$

folgt. Mit $R_{SE} = 150 \cdot 10^6$km erhält man

$$T_S \approx 5771\text{K} \ . \tag{27}$$

Aufgabe 7:
Ein auf die Temperatur T erhitzter Hohlraum mit dem Volumen V enthält elektromagnetische Strahlung, die sich in thermodynamischer Hinsicht wie ein Gas mit der Zustandsgleichung

$$p = \frac{1}{3}bT^4 \tag{28}$$

und der inneren Energie

$$U = bT^4V \tag{29}$$

verhält (Photonengas). b ist eine Konstante. Bestimmen Sie die isochore Wärmekapazität C_V und die TV-Form der Adiabatengleichung des Photonengases (gesucht ist eine Gleichung der Form $T^aV^b = const.$), wobei ein adiabatischer Prozess durch $\delta Q = 0$ definiert ist.

Hinweis: Verwenden Sie an geeigneter Stelle $dU = (\partial U/\partial T)_V\, dT + (\partial U/\partial V)_T\, dV$. Außerdem: $ndx/x + mdy/y = 0 \Rightarrow x^n y^m = const.$

<u>Lösung:</u>

Die isochore Wärmekapazität ergibt sich durch Ableiten von U nach T bei konstantem V:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = 4bT^3V \ . \tag{30}$$

Die Adiabatengleichung erhält man, indem man im ersten Hauptsatz

$$dU = \delta Q + \delta W \tag{31}$$

$\delta Q = 0$ setzt und $\delta W = -pdV$ berücksichtigt:

$$dU + pdV = 0 \ . \tag{32}$$

Ersetzt man hier dU und p mit Hilfe der gegebenen $p(T,V)$ und $U(T,V)$, dann erhält man eine Differentialgleichung für den Zusammenhang zwischen T und V:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV = 4bT^3V\,dT + bT^4dV \tag{33}$$

und

$$pdV = \frac{1}{3}bT^4dV \ . \tag{34}$$

Zusammen:

$$4bT^3V\,dT + bT^4dV + \frac{1}{3}bT^4dV = 0 \ , \tag{35}$$

bzw.

$$3\frac{dT}{T} + \frac{dV}{V} = 0 \ . \tag{36}$$

Also gemäß dem Hinweis in der Angabe

$$T^3V = const \ . \tag{37}$$

Aufgabe 8:
Die Lufttemperatur über einem großen See sei $-2°$C, während das Wasser im See eine Temperatur von $0°$C hat. Wie lange dauert es, bis sich im See eine 10cm dicke Eisschicht gebildet hat? Nehmen Sie an, dass hierbei nur die Wärmeleitung ($\lambda_{Eis} = 2,3$W/mK) als Wärmetransportmechanismus eine Rolle spielt. Die spezifische Schmelzwärme von Eis beträgt $3,3 \cdot 10^5$J/kg und die Dichte von Eis ist $\rho_{Eis} = 920$kg/m^3.

Hinweis: Die Differentialgleichung lässt sich durch Trennung der Variablen lösen.

Lösung:

Es gibt den Wärmestrom

$$\dot{Q} = \frac{\lambda}{x}A\Delta T \ . \tag{38}$$

Um die Masse m an Wasser zum Gefrieren zu bringen, muss man ihr die Wärmemenge

$$Q = mS \tag{39}$$

entziehen, wobei S die spezifische Schmelzwärme ist. Ableiten nach der Zeit ergibt

$$\dot{m} = \frac{\dot{Q}}{S} \tag{40}$$

für die Masse dm an Wasser, die durch den Wärmestrom $\dot{Q}$ pro Zeiteinheit dt gefriert. Diese Masse wird zu Eis und erhöht das Volumen der Eisdecke gemäß

$$\dot{V} = \frac{\dot{m}}{\rho_{Eis}} \ . \tag{41}$$

Die Zunahme der Dicke der Eisdecke ergibt sich schließlich durch

$$\dot{x} = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{\dot{m}}{\rho_{Eis} A} \ . \tag{42}$$

Alles zusammen ergibt

$$\dot{x} = \frac{\lambda}{\rho_{Eis} S x} \Delta T \ . \tag{43}$$

Dies ist eine Differentialgleichung, die sich durch Trennung der Variablen einfach lösen lässt:

$$x dx = \frac{\lambda \Delta T}{\rho_{Eis} S} dt \tag{44}$$

$$\int x dx = \int \frac{\lambda \Delta T}{\rho_{Eis} S} dt \tag{45}$$

$$\frac{1}{2} x^2 = \frac{\lambda \Delta T}{\rho_{Eis} S} t \ . \tag{46}$$

Auflösen nach t und Einsetzen der Werte liefert

$$t = \frac{\rho_{Eis} x^2 S}{2 \lambda \Delta T} \approx 3,8\mathrm{d}(3\mathrm{d} : 19\mathrm{h} : 40\mathrm{min}) \ . \tag{47}$$

Aufgabe 9:
Ein Block aus Kupfer rutscht eine schiefe Ebene mit einer Länge von 10m und einem Gefälle von 30° hinunter. Der Reibungskoeffizient zwischen Kupfer und dem Material der Ebene betrage $\mu_R = 0,2$. Wie stark erwärmt sich der Kupferblock, wenn man davon ausgeht, dass die gesamte Reibungsarbeit in eine gleichmäßige Erwärmung des Kupferblocks übergeht? Die spezifische Wärmekapazität von Kupfer ist $c = 386\mathrm{J/kgK}$.

Lösung:

Die Temperaturerhöhung ergibt sich aus der zugeführten Wärme Q per

$$\Delta T = \frac{Q}{cm} \ . \tag{48}$$

Die zugeführte Wärme ist gleich der verrichteten Reibungsarbeit W, diese wiederum ergibt sich aus

$$W = Fs \tag{49}$$

mit

$$F = \mu_R mg \cos\alpha \ . \tag{50}$$

Also:

$$\Delta T = \frac{\mu_R gs \cos\alpha}{c} = 0,044°\mathrm{C} \ . \tag{51}$$

Aufgabe 10:
Gegeben sei ein beheizbares Zimmer mit dem Volumen $75\mathrm{m}^3$ und der Anfangstemperatur 14°C. Die Heizung werde nun aufgedreht, bis die Endtemperatur 20°C erreicht ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Luft näherungsweise als reinen Stickstoff N_2 und diesen als ideales Gas. Der Luftdruck soll 1013hPa betragen und sich durch das Heizen nicht verändern.

(a) Wie groß ist die in der Zimmerluft anfänglich enthaltene Energie?

(b) Wie groß ist die Energie der Zimmerluft nach Beendigung des Heizvorgangs?

(c) Welche Wärmeenergie hat die Heizung abgegeben?

Lösung:

Für Stickstoff als 2-atomiges ideales Gas gilt:

$$U = \frac{5}{2}\nu RT \ . \tag{52}$$

Die Molzahl ν wird mit Hilfe der idealen Gasgleichung bestimmt:

$$\nu = \frac{pV}{RT} \ . \tag{53}$$

Damit folgt:

$$U = \frac{5}{2}pV = 19,0\mathrm{MJ} \ . \tag{54}$$

Anmerkung: Der Vibrationsfreiheitsgrad ist hier eingefroren.

(b) Aus

$$U = \frac{5}{2}pV \tag{55}$$

folgt, dass U im geheizten Zimmer genauso groß, wie im ungeheizten ist. Dies liegt daran, dass die Luftmenge im Zimmer abnimmt ($p = const$).

(c) Da ν nicht konstant ist, starten wir mit

$$dQ = C_p dT = \frac{7}{2}\nu R dT \ , \tag{56}$$

wobei ν eine abnehmende Funktion von T ist. Wegen $pV = const$ gilt wegen der idealen Gasgleichung $\nu T = const$, also

$$\nu T = \nu_0 T_0 \tag{57}$$

und damit

$$\nu(T) = \frac{\nu_0 T_0}{T} \ . \tag{58}$$

Damit erhalten wir

$$dQ = \frac{7}{2}\nu_0 R T_0 \frac{dT}{T} \ , \tag{59}$$

was zu

$$\Delta Q = \frac{7}{2}\nu_0 R T_0 \int_{T_0}^{T_1} \frac{dT}{T} = \frac{7}{2}\nu_0 R T_0 \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) \tag{60}$$

integriert werden kann. ν_0 folgt aus

$$\nu_0 = \frac{pV}{RT_0} \ . \tag{61}$$

Also:

$$\Delta Q = \frac{7}{2} pV \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) = 550\text{kJ} \ . \tag{62}$$

Aufgabe 11:
Während einer Wanderung befällt Sie nachts eine plötzliche Lust auf Eis, doch die Umgebungstemperatur beträgt lediglich 6°C. Sie wissen jedoch, dass ein mondloser, sternenklarer Nachthimmel als Schwarzkörperstrahler der Temperatur $T_h = -23°\text{C}$ dienen kann. Also kippen Sie Wasser in ein vom Boden thermisch isoliertes Gefäß und erhalten eine dünne Wasserschicht der Masse $m_W = 4{,}5\text{g}$ mit der Oberfläche $A_W = 9\text{cm}^2$ und dem Emissionsgrad $\epsilon = 0{,}9$. Berechnen Sie die Zeit, die das Wasser zum Einfrieren benötigt. Die Wärmekapazität von Wasser beträgt $c_W = 4190\text{J/kgK}$ und die latente Schmelzwärme von Wasser ist durch $L_W = 333\text{kJ/kg}$ gegeben.

Hinweis: Nehmen Sie an entsprechender Stelle an, dass die Wassertemperatur konstant bleibt, da die Änderung nur gering ist.

Lösung:

Die Wärmemenge, die das Wasser abstrahlen muss, um zu gefrieren, entspricht der Summe der abgegebenen Wärme bis zum Erreichen von 0°C und der latenten Schmelzwärme, die es abgeben muss, um zu gefrieren, also:

$$\Delta Q = m_W c_W (0 - 6°\text{C}) + (-m_W L_W) = -1612\text{J} \ . \tag{63}$$

Das Wasser strahlt mit dem Emissionsgrad $\epsilon = 0,9$ und der Temperatur $T = 6°$C, der Nachthimmel wirkt als perfekter Strahler der Temperatur $T_h = -23°$C, mit dem Stefan-Boltzmann-Gesetz erhält man

$$P = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \sigma\epsilon A T_h^4 - \sigma\epsilon A T^4 = \sigma\epsilon A(T_h^4 - T^4) \tag{64}$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta Q}{\sigma\epsilon A(T_h^4 - T^4)} = 4,5\text{h} \ , \tag{65}$$

was weniger als einer Nacht entspricht. Diese Methode wurde in einigen Teilen der Welt vor der Erfindung von entsprechenden Maschinen tatsächlich verwendet.

Aufgabe 12:
Eine Luftblase von 20cm^3 Volumen befinde sich in 40m Tiefe am Grund eines Sees, wo eine Temperatur von 4°C herrsche. Die Blase steige zur Oberfläche auf, wo die Temperatur 20°C sein soll. Nehmen Sie für die Temperatur der Blase jeweils den Wert der Wassertemperatur an. Wie groß ist das Volumen an der Wasseroberfläche? (Vor dem Zerplatzen ...).

Hinweis: Der Schweredruck ist gegeben durch $p(h) = p_0 + \rho g h$.

Lösung:

Der Faktor νR im idealen Gasgesetz ist in beiden Fällen gleich, also folgt durch Gleichsetzen:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \Rightarrow V_2 = \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1} V_1 = 103\text{cm}^3 \ , \tag{66}$$

mit $p_1 = p_0 + \rho g 40\text{m}$.