Ferienkurs Experimentalphysik II
Elektrodynamik - Lösungen

Lennart Schmidt, Steffen Maurus

07.09.2011

Aufgabe 1:
Leiten Sie aus der integralen Formulierung des Induktionsgesetzes,

$$U_{ind} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_A \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{A} \ , \tag{1}$$

die differentielle Formulierung her.
Welcher wichtige Unterschied bezüglich der Aussagekraft besteht zwischen diesen beiden Formulierungen?

Lösung:

Wir betrachten eine Leiterschleife. Dann ist die darin induzierte Spannung per Definition gegeben durch

$$U_{ind} = \oint_{\partial A} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} \ , \tag{2}$$

wobei ∂A den Rand der durch die Leiterschleife eingeschlossenen Fläche bezeichnet. Nach dem Stokes'schen Satz gilt

$$\oint_{\partial A} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_A (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E})\cdot \mathrm{d}\mathbf{A} \ . \tag{3}$$

Für $A = const.$ gilt damit

$$-\int_A \frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t}\cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \int_A (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E})\cdot \mathrm{d}\mathbf{A} \tag{4}$$

und daraus folgt

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = -\frac{B}{\mathrm{d}t} \ . \tag{5}$$

Da wir $A = const.$ angenommen haben, beschreibt die differentielle Form keine Induktion durch eine Änderung der vom Magnetfeld durchsetzten Fläche.

Aufgabe 2:
Berechnen Sie die Impedanzen einer Spule der Induktivität L, Z_L, und eines Kondensators der Kapazität C, Z_C. Betrachten Sie dazu jeweils einen Stromkreis mit Spannungsquelle und Spule bzw. Kondensator.

Lösung:

In einem Stromkreis mit einer Spannungsquelle und einer Spule gilt, dass die Summe aus angelegter Spannung und Induktionsspannung verschwindet: $U(t) + U_{ind}(t) = 0$. Damit gilt

$$U(t) = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \ . \tag{6}$$

Mit $U(t) = U_0 e^{\imath\omega t}$ und $I(-\infty) = 0$ erhält man

$$I(t) - I(-\infty) = I(t) = \frac{U_0}{L}\int_{-\infty}^{t} e^{\imath\omega t'}\mathrm{d}t' = \frac{U_0}{L}\frac{1}{\imath\omega}e^{\imath\omega t} \ . \tag{7}$$

Letztendlich berechnet sich daraus die Impedanz Z_L zu

$$Z_L = \frac{U(t)}{I(t)} = \imath\omega L \ . \tag{8}$$

Nun betrachten wir einen Stromkreis mit Spannungsquelle und Kondensator. Mit $U(t) = U_0 e^{\imath\omega t}$ gilt dann

$$I(t) = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(CU) = C\imath\omega U(t) \ . \tag{9}$$

Daraus folgt

$$Z_C = \frac{1}{\imath\omega C} \ . \tag{10}$$

Aufgabe 3:
Zeigen Sie, dass $|\mathbf{S}| \equiv |\mathbf{E}\times\mathbf{H}| = cw_{em}$ ist, wobei $w_{em} = w_{el} + w_{magn}$ die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes ist.

Lösung:

Die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes ist gegeben durch

$$\begin{aligned} w_{em} = w_{el} + w_{magn} &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2}\frac{|\mathbf{B}|^2}{\mu_0} \\ &= \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 c + \frac{1}{2}\frac{1}{c\mu_0}\right)|\mathbf{E}|\,|\mathbf{B}| \ , \end{aligned} \tag{11}$$

wobei die zweite Zeile mit $c = |\mathbf{E}| \,/\, |\mathbf{B}|$ folgt. Mit $1/c^2 = \varepsilon_0\mu_0$ erhält man nun

$$w_{em} = \frac{1}{c\mu_0} |\mathbf{E}| \, |\mathbf{B}| = \frac{1}{c} |\mathbf{S}| \ . \tag{12}$$

Daraus folgt

$$|\mathbf{S}| = c w_{em} \ . \tag{13}$$

Aufgabe 4:
Leiten Sie die Wellengleichung für das elektrische Feld im Vakuum aus den entsprechenden Maxwell-Gleichungen her.
Hinweis: $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}) = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}) - \Delta\mathbf{F}$

Lösung:

Wir betrachten

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{14}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \ . \tag{15}$$

Weiter ist

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\underbrace{\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}}_{=0,\ da \rho = 0} \right) - \Delta\mathbf{E} = -\Delta\mathbf{E} \ . \tag{16}$$

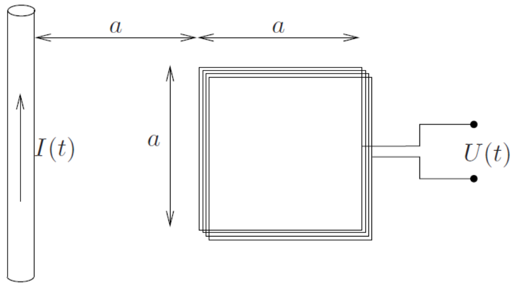
Mit GL.(14) erhält man

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}) &= -\boldsymbol{\nabla} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\ &= -\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{17}$$

Kombination und Verwendung von $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ liefert schließlich

$$\Delta\mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \ . \tag{18}$$

Aufgabe 5:
Betrachten Sie die abgebildetet Messanordnung, bestehend aus einem geraden Leiterdraht und einer flachen quadratischen Spule, die sich in der Ebene des Drahtes befindet. Im Draht fließt der Wechselstrom $I(t) = I_0 \cos \omega t$. Berechnen Sie $U(t)$ für $a = 5$cm,



$N = 1000$ Windungen, $I_0 = 10$A und $f = 60$Hz. Nehmen Sie an, dass der Draht unendlich lang ist und verschwindenden Querschnitt hat. Sie brauchen sich über die Vorzeichen keine Gedanken zu machen. Die magnetische Feldkonstante ist $\mu_0 = 12.57 \cdot 10^{-7}$Vs/Am.
Lösung:

Wir legen das Koordinatensystem so, dass sich die Anordnung in der xz-Ebene befindet, mit der Spule im positiven x-Bereich und dem Draht entlang der z-Achse. Nach Biot-Savart oder dem Ampereschen Durchflutungsgesetz ist das zeitabhängige B-Feld des Drahtes ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$)

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = B(t, r)\mathbf{e}_\phi, \quad B(t, r) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} \ . \tag{19}$$

Die induzierte Spannung $U(t)$ ist nach dem Induktionsgesetz betragsmäßig gegeben durch

$$U = N \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \mathrm{d}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \tag{20}$$

Also

$$\begin{aligned} U(t) &= N \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_a^{2a} \mathrm{d}x \int_{-a/2}^{a/2} dz B(t, x, 0, z) && (21) \\ &= N \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_a^{2a} \mathrm{d}x \int_{-a/2}^{a/2} dz \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi x} && (22) \\ &= \frac{N a \mu_0 \dot{I}(t)}{2\pi} \int_a^{2a} \frac{\mathrm{d}x}{x} && (23) \\ &= \frac{N a \mu_0 \dot{I}(t) \ln 2}{2\pi} && (24) \end{aligned}$$

Mit $I(t) = I_0 \cos \omega t$ folgt

$$U(t) = \frac{N a \mu_0 \ln 2}{2\pi} I_0 \omega \sin \omega t \ . \tag{25}$$

Einsetzen der Zahlenwerte ergibt

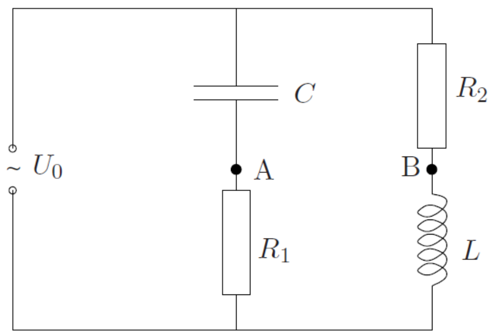
$$U(t) = 0{,}0261\,\mathrm{V}\sin(377\mathrm{s}^{-1}t)\ . \tag{26}$$

Aufgabe 6:
Betrachten Sie den in der Abbildung dargestellten Stromkreis. Die Spannungsquelle liefert die Wechselspannung $U(t) = U_0 e^{\imath\omega t}$. Der Strom den die Quelle in den Kreis schickt, ist dann $I(t) = I_0 e^{\imath\omega t}$ (U_0 und I_0 sind komplex).

(a) Welchen Wert hat I_0 als Funktion der Frequenz ω, der Spannungsamplitude U_0 und der Parameter R_1, R_2, C, L?

(b) Zeigen Sie, dass zwischen den Punkten A und B keine Spannung herrscht, wenn die Beziehung $R_1 R_2 = L/C$ erfüllt ist.

Hinweis: Rechnen Sie mit komplexen Widerständen.



Lösung:

(a) Es bietet sich an, mit komplexen Widerständen zu rechnen. Die Impedanzen eines Ohmschen Widerstandes, eines Kondensators und einer Spule sind

$$Z_R(\omega) = R, \quad Z_C(\omega) = -\frac{\imath}{\omega C}, \quad Z_L(\omega) = \imath\omega L\ . \tag{27}$$

Bei Hintereinanderschaltung addieren sich die Impedanzen, bei Parallelschaltung ist der Kehrwert der Gesamtimpedanz die Summe der Kehrwerte der Einzelimpedanzen. Für den betrachteten Stromkreis ergibt sich somit:

$$\frac{1}{Z(\omega)} = \frac{1}{R_2 + \imath\omega L} + \frac{1}{-\imath/\omega C + R_1}\ . \tag{28}$$

Also:

$$I_0 = \frac{U_0}{Z(\omega)} = \left[\frac{1}{R_2 + \imath\omega L} + \frac{1}{-\imath/\omega C + R_1}\right] U_0\ . \tag{29}$$

(b) Die komplexe Amplitude der am Kondensator abfallenden Spannung ist

$$U_{0C} = \frac{-\imath/\omega C}{-\imath/\omega C + R_1} U_0 \ , \tag{30}$$

denn

$$I_{01} = \frac{1}{-\imath/\omega C + R_1} U_0 \tag{31}$$

ist die komplexe Amplitude des durch den linken Ast des Stromkreises fließenden Stroms. Die am Widerstand R_2 abfallende Spannung ist

$$U_{0R_2} = \frac{R_2}{R_2 + \imath\omega L} U_0 \ , \tag{32}$$

denn

$$I_{02} = \frac{1}{R_2 + \imath\omega L} U_0 \tag{33}$$

ist die komplexe Amplitude des durch den rechten Ast des Stromkreises fließenden Stroms.
An den Punkten A und B herrscht gleiches Potential, wenn $U_{0C} = U_{0R_2}$ ist, was sich zu

$$\frac{L}{C} = R_1 R_2 \tag{34}$$

vereinfacht.

Aufgabe 7:
In Kugelkoordinaten stellt die sphärische Welle

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{\alpha}{r} \sin\theta \cos(\omega t - kr)\mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \frac{\beta}{r} \sin\theta \cos(\omega t - kr)\mathbf{e}_\phi \tag{35}$$

mit $\alpha = \beta c$ das Fernfeld eines Hertzschen Dipols dar. Berechnen Sie die mittlere Leistung, die von diesem Dipol durch die Halbsphäre $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $r = 1\text{km}$ gestrahlt wird, wenn α den Wert 100V hat. Die elektrische Feldkonstante ist $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\text{C}^2/\text{Jm}$.
Hinweis: $\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \sin^3\theta = 2/3$.

Lösung:

Die momentane Strahlungsintensität (Einheit W/m^2) an einem bestimmten Ort ist durch den Poynting-Vektor

$$\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} \tag{36}$$

gegeben. Im vorliegenden Fall sieht er konkret so aus:

$$\mathbf{S}(t,\mathbf{r}) = \varepsilon_0 c^2 \frac{\alpha\beta}{r^2} \sin^2\theta \cos^2(\omega t - kr)\mathbf{e}_r = \varepsilon_0 c \frac{\alpha^2}{r^2} \sin^2\theta \cos^2(\omega t - kr)\mathbf{e}_r \ . \tag{37}$$

Er zeigt also stets in radialer Richtung vom Ursprung (= Ort des Dipols) weg und sein Betrag oszilliert zwischen 0 und dem ortsabhängigen Maximalwert $\varepsilon_0 c(\alpha^2/r^2)\sin^2\theta$. Die momentane Strahlungsleistung (= Energiefluss, Einheit W) durch die Halbsphäre ist das Oberflächenintegral

$$P = \int_{HS} \mathrm{d}\mathbf{A}\cdot\mathbf{S} = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi r^2 \sin\theta \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{S} \ . \tag{38}$$

Man erhält:

$$P(t) = 2\pi\varepsilon_0 c\alpha^2 \cos^2(\omega t - kr) \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \sin^3\theta = \frac{4\pi}{3}\epsilon_0 c\alpha^2 \cos^2(\omega t - kr) \ . \tag{39}$$

Dies ist die momentane Strahlungsleistung zur Zeit t durch die Halbsphäre mit Radius r. Das zeitliche Mittel davon ist

$$\bar{P} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t P(t) \ , \tag{40}$$

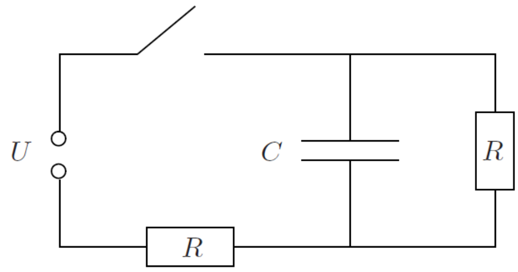
also im Wesentlichen durch das Zeitmittel des cos^2-Terms gegeben. Dieses hat bekanntermaßen den Wert 1/2. Also

$$\bar{P} = \frac{2\pi}{3}\varepsilon_0 c\alpha^2 \ , \tag{41}$$

unabhängig von r. Als Zahlenwert ergibt sich mit $\alpha = 100\text{V}$

$$\bar{P} = 55.5\text{W} \ . \tag{42}$$

Aufgabe 8:
Betrachten Sie die skizzierte Schaltung aus einem Kondensator C und zwei identischen Widerständen R. Für $t < 0$ sei der Schalter geöffnet und der Kondensator ungeladen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter geschlossen und die Schaltung mit der Spannungsquelle der konstanten Spannung U verbunden.
(a) Wie groß ist der Gesamtstrom im Stromkreis unmittelbar nach dem Schließen des Schalters? Wie groß ist die Ladung des Kondensators und der Gesamtstrom im Stromkreis für sehr große Zeiten?
(b) Berechnen Sie für $t > 0$ den Gesamtstrom im Stromkreis und die Ladung des Kondensators als Funktion der Zeit, indem Sie eine geeignete Differentialgleichung aufstellen und lösen.



Lösung:

(a) Unmittelbar nach dem Schließen des Schalters befindet sich keine Ladung auf dem Kondensator, sein effektiver Widerstand ist also null, der Kondensator wirkt daher wie eine leitende Verbindung. Daher fließt der gesamte Anfangsstrom durch den Kondensatorast und kein Strom durch den parallel geschalteten Widerstand. Der einzige Widerstand im Stromkreis ist also der an der Spannungsquelle und der Gesamtstrom ist

$$I_0 = \frac{U}{R} \; . \tag{43}$$

Für $t = \infty$ hat der Kondensator eine konstante Ladung und der gesamte Strom fließt nun durch den Widerstandsast. Daher gilt:

$$2RI_\infty = U \; , \tag{44}$$

also

$$I_\infty = \frac{U}{2R} \; . \tag{45}$$

Die Ladung auf dem Kondensator ergibt sich dann aus

$$\frac{1}{C} Q_\infty + RI_\infty = U \; , \tag{46}$$

also

$$Q_\infty = \frac{CU}{2} \; . \tag{47}$$

(b) Es bezeichne $I_C = \dot{Q}$ den Strom durch den Kondensator, I_R den Strom durch den parallel geschalteten Widerstand und I den Gesamtstrom. Dann gilt

$$RI_R = U - RI \tag{48}$$

und

$$\frac{Q}{C} = U - RI \tag{49}$$

und

$$I_R + I_C = I \ . \tag{50}$$

Das sind 3 Gleichungen für 3 unbekannte Funktionen. Elimination des Gesamtstroms I ergibt

$$RI_R = \frac{1}{2}\left(U - RI_C\right) \tag{51}$$

und

$$\frac{Q}{C} = U - R\left(I_R + I_C\right) \tag{52}$$

Eliminiert man aus beiden Gleichungen I_R, dann erhält man

$$\frac{Q}{C} + \frac{1}{2}RI_C = \frac{1}{2}U \ . \tag{53}$$

Wegen $I_C = \dot{Q}$ ist das eine Differentialgleichung für $Q(t)$:

$$\dot{Q} + \frac{2}{RC}Q = \frac{U}{R} \ , \tag{54}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$Q(t) = Ae^{-2t/RC} + \frac{CU}{2} \tag{55}$$

(allgemeine homogene Lösung plus spezielle inhomogene Lösung). Arbeitet man die Anfangsbedingung $Q(0) = 0$ ein, dann erhält man

$$Q(t) = \frac{CU}{2}\left(1 - e^{-2t/RC}\right) \ . \tag{56}$$

Der Gesamtstrom ergibt sich daraus per

$$\frac{Q}{C} = U - RI \tag{57}$$

zu

$$I(t) = \frac{U}{2R}\left(1 + e^{-2t/RC}\right) \tag{58}$$

(Aus $Q(t)$ und $I(t)$ ergeben sich wieder die im Aufgabenteil (a) gefundenen Werte für $t = 0$ bzw. $t = \infty$.).

Aufgabe 9:
Der Sendedipol einer Mondlandefähre erzeugt elektromagnetische Wellen, deren maximale elektrische Feldstärke im Abstand $r_1 = 400\text{m}$ senkrecht zur Dipolachse $E_1 = 0,7\text{V/m}$ beträgt.

(a) Für die elektrische und magnetische Energiedichte einer elektromagnetischen Welle gilt

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 = \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}^2 = u_B \ . \tag{59}$$

Was folgt daraus für das Verhältnis E/B und wie groß ist die maximale magnetische Feldstärke B_1 im Abstand r_1 senkrecht zur Dipolachse?
(b) Wie groß ist die mittlere Strahlungsintensität in einem Abstand r_2 unter einem Winkel θ zur Dipolachse, ausgedrückt durch E_1 und r_1?
(c) Welche Werte haben die mittleren Strahlungsintensitäten senkrecht zur Dipolachse im Abstand r_1 und auf der Erde ($r_2 = 384000\text{km}$)? Welche mittleren Intensitäten erhält man unter einem Winkel von $45°$ zur Dipolachse?
(d) Der Empfänger auf der Erde benötigt als Mindestfeldamplitude $0,5\mu\text{V/m}$. Kann er Signale vom Mond unter einem Winkel von $45°$ zur Dipolachse empfangen?

Lösung:

(a) Aus der Gleichheit der elektrischen und magnetischen Energiedichte folgt

$$\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{\mu_0} B^2 \ , \tag{60}$$

also

$$\frac{E}{B} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c \ . \tag{61}$$

Die maximale magnetische Feldstärke am Ort r_1 ist also

$$B_1 = \frac{E_1}{c} = \frac{0,7\text{V/m}}{3 \cdot 10^8\text{m/s}} = 2,33\text{nT} \ . \tag{62}$$

(b) Die maximale Strahlungsintensität ergibt sich aus der maximalen elektrischen Feldstärke per

$$S = c\varepsilon_0 E^2 \ . \tag{63}$$

Also ist die mittlere Strahlungsintensität

$$\bar{S} = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E^2 \ . \tag{64}$$

Aus der Abstrahlcharakteristik des Dipols und der invers-quadratischen Abnahme der Strahlungsintensität folgt

$$\bar{S}(r_2, \theta) = \sin^2\theta \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \bar{S}(r_1, 90°) \tag{65}$$

und mit

$$\bar{S}(r_1, 90°) = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_1^2 \tag{66}$$

also

$$\bar{S}(r_2, \theta) = \sin^2\theta \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_1^2 \tag{67}$$

(c)

$$\bar{S}(r_1, 90°) = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_1^2 = 6,5 \cdot 10^{-4} \mathrm{W/m^2} \tag{68}$$

$$\bar{S}(r_2, 90°) = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_1^2 = 7,06 \cdot 10^{-16} \mathrm{W/m^2} \tag{69}$$

$$\bar{S}(r_1, 45°) = \sin^2(45°) \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_1^2 = 3,25 \cdot 10^{-4} \mathrm{W/m^2} \tag{70}$$

$$\bar{S}(r_2, 45°) = \sin^2(45°) \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_1^2 = 3,53 \cdot 10^{-16} \mathrm{W/m^2} \tag{71}$$

(d) Wegen der invers-quadratischen Abnahme der Strahlungsintensität nimmt die Feldstärke inver-linear mit der Entfernung ab, also

$$E_2 = \frac{r_1}{r_2} E_1 \ . \tag{72}$$

Damit folgt:

$$E_2(45°) = \frac{r_1}{r_2} \sin(45°) E_1(90°) = 5,16 \cdot 10^{-7} \mathrm{V/m} = 0,516 \mu\mathrm{V/m} \ . \tag{73}$$

⇒ Empfang ist möglich!

Aufgabe 10:
Beschreiben Sie die Art der Polarisation für die ebenen elektromagnetischen Wellen, die durch die folgenden Gleichungen für das **E**-Feld beschrieben werden:

$$(a) \quad E_y = E_0 \sin(kx - \omega t), \ E_z = 4E_0 \sin(kx - \omega t) \tag{74}$$

$$(b) \quad E_y = -E_0 \cos(kx + \omega t), \ E_z = E_0 \sin(kx + \omega t) \tag{75}$$

$$(c) \quad E_y = 2E_0 \cos(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}), \ E_z = -2E_0 \sin(kx - \omega t) \tag{76}$$

Lösung:

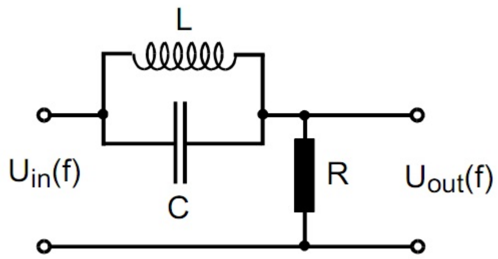
Für $x = 0$ ist die Art der Polarisation leicht zu erkennen

$$(a) \quad E_y = -E_0 \sin(\omega t),\ E_z = -4E_0 \sin(\omega t) \tag{77}$$
$$(b) \quad E_y = -E_0 \cos(\omega t),\ E_z = E_0 \sin(\omega t) \tag{78}$$
$$(c) \quad E_y = 2E_0 \sin(\omega t),\ E_z = 2E_0 \sin(\omega t) \tag{79}$$

Dann kann das **E**-Feld als eine Funktion der Zeit skizziert werden und die Polarisation einfach abgelesen werden:
(a) linear
(b) zirkular
(c) linear

Aufgabe 11:

Gegeben sei ein Widerstand R, eine Kapazität C und eine Induktivität L in der in der Skizze gezeigter Anordnung.
a) Berechnen Sie den komplexen Wechselstromwiderstand Z der Schaltung.
b)Berechnen Sie das Verhältnis von Aus- zu Eingangsspannung $\frac{U_{out}}{U_{in}}$ als Funktion der Frequenz f der Eingangsspannung.
c)Skizzieren Sie den Betrag $\left|\frac{U_{out}}{U_{in}}\right|$ als Funktion der Frequenz f.



Lösung:

a) L und C sind parallel:

$\frac{1}{Z_p} = \frac{1}{i\omega L} + i\omega C = \frac{-i+i\omega^2 LC}{\omega L} = i\left(\frac{1}{\omega L}(\omega^2 LC - 1)\right)$

Also insgesamt:

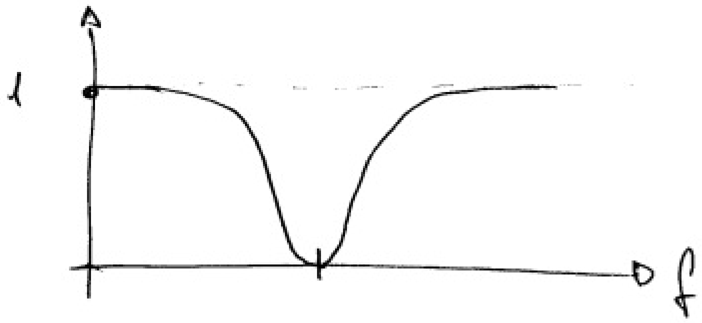
$Z_{gesamt} = R + Z_p = R + \frac{\omega L}{i(\omega^2 LC-1)} = R - i\frac{\omega L}{\omega^2 LC-1}$

b)Spannungsteiler:

$\frac{U_{out}}{U_{in}} = \frac{R}{Z_{gesamt}} = \frac{R}{R-i\frac{\omega L}{\omega^2 LC-1}} = \frac{R\left(R+i\frac{\omega L}{\omega^2 LC-1}\right)}{R^2+\frac{\omega^2 L^2}{(\omega^2 LC-1)^2}} = \left(\frac{R}{R^2+\frac{\omega^2 L^2}{(\omega^2 LC-1)^2}} \cdot (R+i\frac{\omega L}{\omega^2 LC-1})\right)$

$\left|\frac{U_{out}}{U_{in}}\right| = \frac{R}{R^2+\frac{\omega^2 L^2}{(\omega^2 LC-1)^2}} \cdot \left(R^2 + \frac{\omega^2 L^2}{(\omega^2 LC-1)^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2+\frac{\omega^2 L^2}{(\omega^2 LC-1)^2}}}$

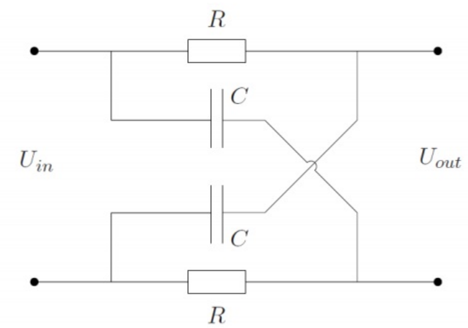
c)



$(2\pi f)^2 = \frac{1}{LC}$

Aufgabe 12:

In der folgenden Abbildung ist ein sog. Allpass-Filter dargestellt:

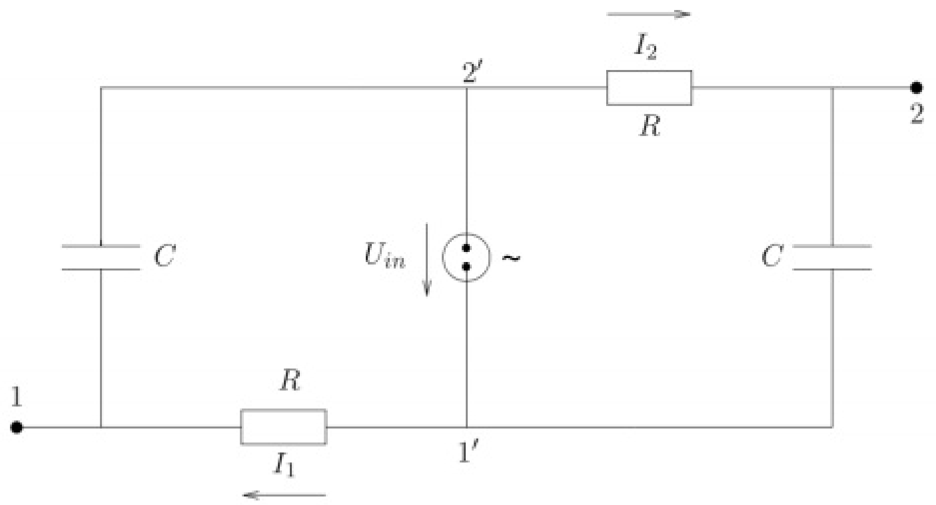


Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $H(\omega) = U_{out}/U_{in}$.
Hinweis: Durch genaues Hinsehen erkennt man, dass die Schaltung auch in einer etwas einfacheren Form gezeichnet werden kann. Verwenden Sie den komplexen Ansatz $U_{in}(t) = U_{in} \exp^{i\omega t}$ und rechnen Sie mit komplexen Widerständen, um die komplexe Amplitude I_1 und I_2 der Ströme $I_1(t) = I_1 \exp^{i\omega t}$ und $I_2(t) = I_1 \exp^{i\omega t}$ und daraus U_{out} zu bestimmen. Das Endergebnis lautet: $H(\omega) = (1 - i\omega RC)/(1 + i\omega RC)$.

b)Wie groß ist der Verstärkungsfaktor und die Phasenverschiebung als Funktion von ω? Warum heisst die Schaltung Allpass-Filter?

Lösung:

Durch genaues Hinsehen erkennt man, dass sich der Allpass-Filter auch in folgender Form darstellen lässt:



Es handelt sich also um zwei identische ungekoppelte RC-Schaltungen, die an die gemeinsame Wechselspannungsquelle $U_{in}(t)$ angeschlossen sind, wobei die Ausgangsspannung $U_{out}(t)$ zwischen den markierten Punkten 1 und 2 abgegriffen wird. Außerdem sind die positiven Richtungskonventionen für I_1 und I_2 eingezeichnet, ebenso die positive Richtung für die Eingangsspannung. $U_{in}(t)$ soll also positives Vorzeichen haben, wenn sie an der Pfeil- spitze positives und am Pfeilende negatives Potential erzeugt. D.h. der Pfeil gibt die Bewegungsrichtung der positiven Ladungsträger durch die Spannungsquelle an. (Beliebige andere Konventionen sind möglich, müssen aber konsistent durchgehalten werden.)

Dann ergibt sich die komplexe Amplitude I_1 aus der komplexen Amplitude U_{in} per

$I_1 = \frac{1}{R+\frac{1}{i\omega C}} U_{in}$

denn bei der Reihenschaltung von R und C addieren sich deren komplexen Widerstände. Vorzeichenmäßig ist das korrekt, wie man aus dem Spezialfall ohne Kondensator (also $C = \infty$) erkennt. Für I_2 gilt entsprechend:

$I_2 = -\frac{1}{R+\frac{1}{i\omega C}} U_{in}$

Das negative Vorzeichen ist korrekt, wie man wieder sieht, wenn man den Spezialfall ohne Kondensator betrachtet.

Wegen

$U_{out} = \phi_1 - \phi_2 = \underbrace{\phi_1 - \phi_1'}_{-RI_1} + \underbrace{\phi_1' - \phi_2'}_{U_{in}} + \underbrace{\phi_2' - \phi_2}_{RI_2} = U_{in} - RI_2 + RI_2$

Hier ist U_{in} aufgrund der Maschenregel positiv.
Setzt man hier nun die oben bestimmten I_1 und I_2 ein, dann folgt:

$U_{out} = U_{in} - R\frac{1}{R+\frac{1}{i\omega C}}U_{in} + R\left(-\frac{1}{R+\frac{1}{i\omega C}}U_{in}\right) = \left(1 - \frac{2R}{R+\frac{1}{i\omega C}}U_{in}\right)$

Hieraus kann man die Übertragungsfunktion ablesen:

$H(\omega) = 1 - \frac{2R}{R+\frac{1}{i\omega C}}$

die sich allerdings noch in eine elegantere Form bringen lässt:

$1 - \frac{2R}{R+\frac{1}{i\omega C}} = 1 - \frac{2i\omega RC}{i\omega RC+1} = \frac{1+i\omega RC-2i\omega RC}{1+i\omega RC} = \frac{1-i\omega RC}{1+i\omega RC} = H(\omega)$

b)Der Verstärkungsfaktor ist das Verhältnis der reellen Amplitude von Ausgangs- und Eingangsspannung:

$V = \frac{|U_{out}|}{|U_{in}}$

also einfach der Betrag der Übertragungsfunktion $V = |H(\omega)|$- Im betrachteten Fall ist:

$|H(\omega)| = \left|\frac{1-i\omega RC}{1+i\omega RC}\right| = \frac{1+\omega^2R^2C^2}{1+\omega^2R^2C^2} = 1$

Die Phasenverschiebung zwischen $U_{in}(t)$ und $U_{out}(t)$ ist entsprechend die komplexe Phase der Übertragungsfunktion. Die berechnet man am einfachsten, indem man die Darstellung $1 + i\omega RC = r\exp^{i\phi}$ benutzt:

$H(\omega) = \frac{1-i\omega RC}{1+i\omega RC} = \frac{r\exp^{-i\phi}}{r\exp^{i\phi}} = \exp^{-2i\phi}$

$H(\omega)$ ist also ein reiner Phasenfaktor (klar, denn $|H(\omega)|$=1). Für den Phasenwinkel ϕ gilt aufgrund seiner Definition:

$r\exp^{i\phi} = 1 + i\omega RC \rightarrow \phi = \arctan(\omega RC)$

Also ist die gesuchte Phasenverschiebung zwischen $U_{in}(t)$ und $U_{out}(t)$:

$\Delta\phi = -2\phi = -2\arctan(\omega RC)$

Der Allpass-Filter erzeugt also ein Ausgangssignal, dessen (reelle) Amplitude für alle Frequenzen mit der (reellen) Amplitude des Eingangssignals übereinstimmt, das aber eine frequenzabhängige Phasenverschiebung aufweist. Daher der Name Allpass-Filter.