Ferienkurs Experimentalphysik II

Elektrodynamik

Übung zur Magnetostatik Musterlösung

12. September 2011
Michael Mittermair

Aufgabe 1

Bestimmen sie das B-Feld eines dünnen,(unendlich)langen, geraden Leiters, in dem der Strom I fließt.

Lösung 1

Lösung mit dem Ampéreschen Gesetz:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$

Als Integrationsweg wählt man dabei eine Kreislinie, die den Leiter einschließt.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} B \cdot r \cdot d\varphi = 2\pi r \cdot B = \mu_0 I$$

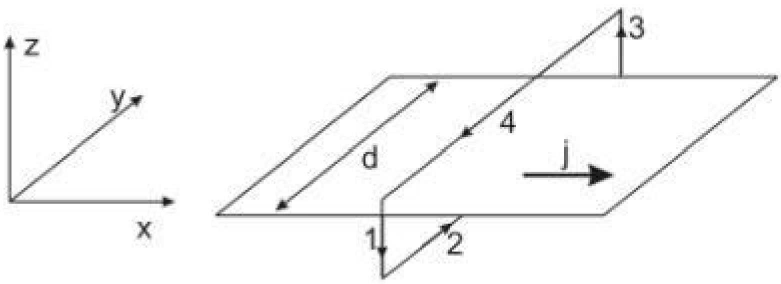
$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Aufgabe 2

Berechnen sie das statische Magnetfeld eines Stroms durch eine unendlich ausgedehnte Ebene mit vernachlässigbarer Dicke und konstanter Stromdichte.
Hinweis: O.B.d.A. kann angenommen werden, dass es sich bei der Ebene um die x-y-Ebene handelt und der Stromfluss nur eine x-Komponente aufweist.

Lösung 2

Als Integrationsweg wählt man ein Rechteck, dessen Normalenvektor parallel zur x-Achse steht.



Aus Ampére folgt:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_1 B(z)dz + \int_2 B(-z)dy + \int_3 B(z)dz + \int_4 B(z)dy = \mu_0 I$$

Aus Symmetrie folgt $\int_1 B(z)dz = -\int_3 B(z)dz$
Damit vereinfacht sich das Integral zu:

$$\int_2 B(-z)dy + \int_4 B(z)dy = B(-z) * d - B(z) * d = \mu_0 I$$

Auch aus der Symmetrie: $(z)| = |B(-z)|$ Damit gilt:

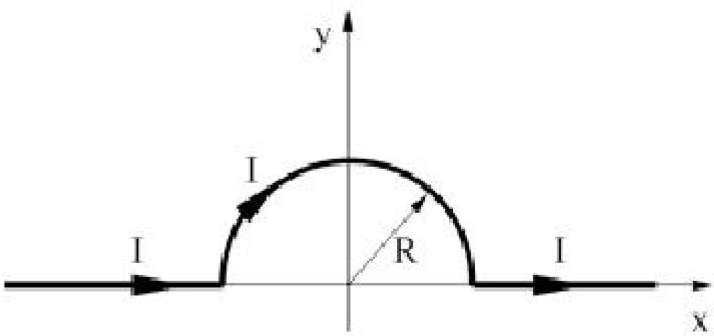
$$B(z) = \frac{\mu_0 I}{2d}$$

Durch die Rechte-Hand-Regel kann man ermitteln, dass das Feld nur eine y-Komponente hat und welches Vorzeichen es haben muss.
Der eingeschlossene Strom ist dabei durch $I = j * d$ gegeben. Und somit gilt für das B-Feld:

$$\vec{B} = -sgn(z)\frac{\mu_0 j}{2}\vec{e}_y$$

Aufgabe 3

Gegeben sei ein in der x-y-Ebene liegender dünner Leiter mit einer halbkreisförmigen Ausbuchtung mit Radius R, durch den ein Strom I fließt(siehe Abbildung).



Berechnen sie die Stärke des Magnetfeldes im Ursprung mit Hilfe des Biot-Savart'schen Gesetzes. Welche Stärke hätte das Feld im Ursprung, wenn es sich stattdessen um einen Einviertel- bzw. Dreiviertel-Kreis oder einen ganzen -kreis handeln würde.

Lösung 3

Das Biot-Savart'sche Gesetz besagt:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int d\vec{s} \times \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3}$$

Da wir nur das Feld im Ursprung betrachten, können wir $\vec{r} = 0$ setzen. Für die Gleichung folgt daher:

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int d\vec{s} \times \frac{-\vec{r'}}{|\vec{r'}|^3}$$

Da für die geraden Teile des Leiters $d\vec{s} | r'$ gilt, tragen sie nicht zu dem Integral bei.
Für den halbkreisförmigen Teil des Leiters gilt, dass $d\vec{s} \perp \vec{r'}$, was zur Folge hat, dass man für diesen Teil das Kreuzprodukt durch ein normales Produkt ersetzen kann. Das neue Integral lautet dann:

$$B(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \ ds \cdot \frac{-r'}{r'^3} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi d\varphi \cdot \frac{1}{r'^2} \cdot r' = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \pi \cdot \frac{1}{r'} = -\frac{\mu_0 I}{4r'}$$

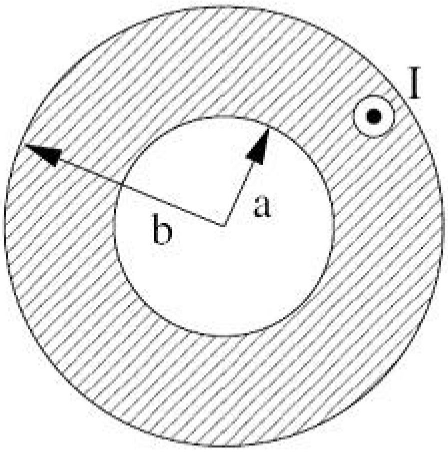
Für r' setzt man dann noch den Radius R des Halbkreises ein und fügt noch den $\vec{e}_z$ Einheitsvektor an Richtung an, da dieser die Richtung des Kreuzproduktes entspricht. Man erhält als Ergebnis:

$$\vec{B}(0) = -\frac{\mu_0 I}{4R} \cdot \vec{e}_z$$

Beim Einviertel-Kreis wären die Integrationsgrenzen 0 und $\pi/2$, deshalb wäre der Betrag des B-Felds nur halb so groß.
Beim Dreiviertel-Kreis wären die Integrationsgrenzen 0 und $\frac{3\pi}{2}$, deshalb wäre der Betrag des B-Felds eineinhalb mal so groß.
Beim vollen Kreis wären die Integrationsgrenzen 0 und 2π, deshalb wäre der Betrag des B-Felds nur doppelt so groß.

Aufgabe 4

Ein unendlich langer Hohlzylinder mit dem Innenradius a und dem Außenradius b führe einen Gleichstrom I. Berechnen sie die magnetische Feldstärke $\vec{B}$ im gesamten Raum, das heißt für Radien r.



Lösung 4

Nach dem Gesetz von Ampére gilt

$$\oint_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot I$$

Dabei entspricht I dem Strom, der durch die geschlossene Fläche fließt über den Rand integriert wird. Da der Zylinder symmetrisch zu seiner Mittelachse ist, integrieren wir über den Kreisrand, sodass die linke Seite stets $\oint\limits_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 2\pi \cdot r \cdot B$ ist. Der eingeschlossene Strom ist im Hohlraum 0, außerhalb des Zylinders I und im Zwischenbereich $I(r) = \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} I$. Damit ist die Feldstärke

$$\vec{B}(r) = \begin{cases} 0 \; f\ddot{u}r & \text{r} \leq a \\ \frac{\mu_0 I (r^2 - a^2)}{2\pi (b^2 - a^2)} \; f\ddot{u}r & \text{a} \leq r \leq b \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \; f\ddot{u}r & \text{b} \leq r \end{cases}$$

Aufgabe 5

Berechnen Sie das magnetische Dipolmoment eines mit Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Kegels, mit Höhe h und Grundseitenradius R, der die konstante Oberflächenladungsdichte σ trägt.

Lösung 5

Der halbe Öffnungswinkel sei $\phi \rightarrow \tan\phi = r/l$, l sei die Seitenkante des Kegels. Für den Strom, der sich ergibt, wenn ein geladener Drahtring mit Radius r und Winkelgeschwindigkeit ω rotiert folgt:

$$I = \rho A v = \lambda v = \lambda \omega r$$

Unseren Gesamtstrom setzen wir solchen kleinen Kreisströmen I zusammen.

$$\lambda = \sigma dl$$
$$\omega r = \omega l \cdot \tan\phi$$
$$\text{dI}=\lambda v = \sigma\omega l \cdot \tan\phi \cdot dl$$

Das Dipolmoment für einen infinitesimal kleinen Ring ist:
mit Fläche $A = \pi r^2 = \pi l^2 \tan^2\phi$
d$\mu = A \cdot dI$ hieraus ergibt sich durch μ

$$\mu = \int\limits_0^{R/tan\phi} d\mu = \pi\sigma\omega\tan^3\phi \int\limits_0^{R/tan\phi} l^3 dl = \frac{1}{4\tan\phi} R^4 \pi\sigma\omega$$

Aufgabe 6

Bei Wasserstoffatomen bewegt sich das Elektron mit einem Radius $r = 0,529 \cdot 10^{-10}$ m um den Kern. Welcher mittleren Stromstärke entspricht diese Ladungsbewegung und welche Magnetfeldstärke erzeugt sie am Ort des Kerns?

Lösung 6

Die Stromstärke I berechnet sich, indem man sich überlegt, wie oft das Elektron mit der Ladung e pro Sekunde den Kern umkreist.

$$I = e \cdot f = e \cdot \frac{\omega}{2\pi}$$

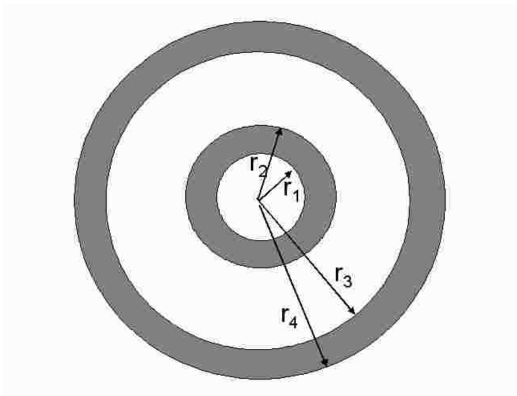
ω erhält man durch das Gleichgewicht von Coulombkraft und Radialkraft

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = mr\omega^2$$
$$\text{I}= \frac{e^2}{4\pi}\sqrt{\frac{1}{\pi\varepsilon_0 r^3 m}} = 1mA$$

Das Magnetfeld um den Kern berechnet sich mit: $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} = 2T$

Aufgabe 7

Zwei konzentrisch angeordnete Rohre werden in entgegengesetzter Richtung von einem Strom I durchflossen. Berechne das Magnetfeld in Abhängigkeit vom Abstand r zum Mittelpunkt der Anordnung!(Der Strom fließt in den grauen Bereichen)



Lösung 7

Man wendet das Ampéresche Gesetz an:

$$\oint_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot I$$

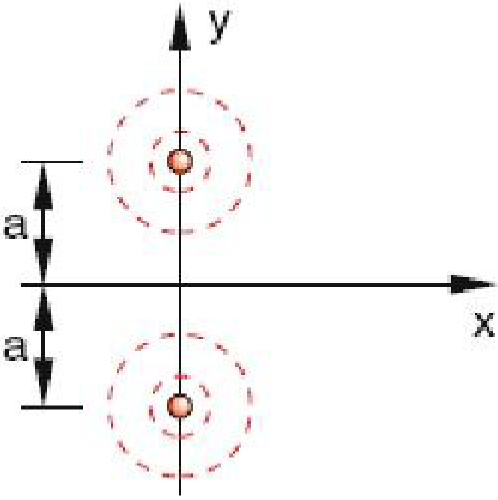
Aus der Symmetrie folgt, dass das B-Feld in z-Richtung konstant sein muss und winkelunabhängig ist. $\rightarrow \oint_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 2\pi r B(r)$

Das B-Feld ergibt sich damit zu $B(r) = \dfrac{\mu_0 I(r)}{2\pi r}$

- $r \leq r_1$ $\rightarrow$B(r)=0
- $r_1 \leq r \leq r_2$ $\rightarrow$B(r)= $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \dfrac{r^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}$
- $r_2 \leq r \leq r_3$ $\rightarrow$B(r)= $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$
- $r_3 \leq r \leq r_4$ $\rightarrow$B(r)= $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \left(1 - \dfrac{r^2 - r_3^2}{r_4^2 - r_3^2}\right)$
- $r_4 \leq r$ $\rightarrow$B(r)=0

Aufgabe 8

Zwei lange parallele Drähte sind im Abstand 2cm parallel zueinander wie in der Abbildung zu sehen in z,Richtung gespannt und werden jeweils in die gleiche Richtung von Strom $I = 10A$ durchflossen. Wie groß ist die Kraft pro Längeneinheit, die die Drähte aufeinander ausüben? Welche Kraft würde wirken, wenn die Ströme in entgegengesetzte Richtungen fließen würden?



Lösung 8

Die Kraft auf einen Leiter der Länge L ist gegeben durch

$$\vec{F} = I(\vec{L} \times \vec{B})$$

Der Leiter befindet sich im Magnetfeld, das vom anderen Leiter im Abstand 2a erzeugt wird.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\vec{e}_\varphi$$

Die Kraft, die Leiter 2 im Kraftfeld von Leiter 1 erfährt:

$$\vec{F}_{21} = I_2 \cdot (\vec{L} \times \frac{\mu_0 I_1}{4\pi a}\vec{e}_{\varphi,1}) = \frac{\mu_0 I_1 \cdot I_2 \cdot L}{4\pi a}\vec{e}_z \times \vec{e}_{\varphi,1} = -\frac{\mu_0 I_1 \cdot I_2 \cdot L}{4\pi a}\vec{e}_{r,1}$$

Pro Längeneinheit ergibt sich:

$$\vec{F}_{21} = -\frac{\mu_0 I_1 \cdot I_2}{4\pi a}\vec{e}_{r,1}$$

Nach Newtons actio = reactio gilt, dass auf Leiter 1 die gleiche Kraft, mit entgegengesetzter Richtung wirkt.

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 \cdot I_2}{4\pi a}\vec{e}_{r,2}$$

Mit $a = 1cm$, $I = 10A$ und $\mu_0 = 12,566 \cdot 10^{-7} H/m$ folgt für die Kraft ein Wert von ca. $10^{-3} N$.
Für parallele Ströme sind die Kräfte anziehend, für antiparallel-laufende Ströme wären sie abstoßend.

Aufgabe 9

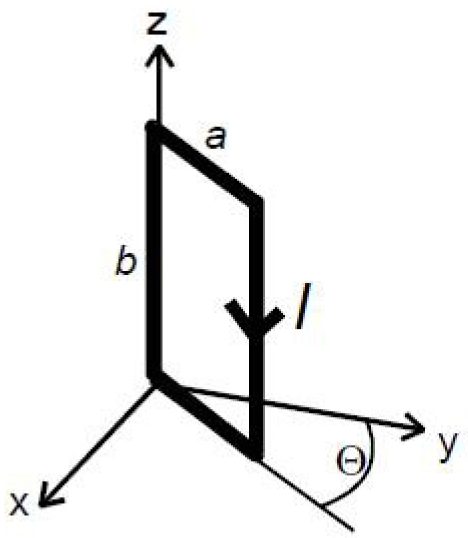
Gegeben ist die rechteckige Stromschleife mit den Abmessungen $a = 11cm$ und $b = 14cm$. Der Winkel $\Theta zwischen Schleife und Achse beträgt \Theta = 30$ und es fließt ein Strom $I = 1A$ durch die Schleife.

a)

Berechnen Sie das magnetische Dipolmoment $\vec{p}_m$ der Stromschleife.

b)

Wie groß ist die potentielle Energie der Schleife in einem Magnetfeld $B = 1T$, wenn $\vec{B}$ entlang der x-Achse angelegt wird? Wie groß ist das Drehmoment auf die Schleife und in welche Richtung wirkt es?



Lösung 9

a)

Der Betrag des Dipolmoments lässt sich einfach über

$$|\vec{p}_m| = I \cdot A = 1A \cdot 0,11 \cdot 0,14m^2 = 1,54 \cdot 10^{-2}Am^2$$

berechen. Da Stromrichtung und Flächennormale ein Rechtssystem bilden müssen, zeigt das Dipolmoment in Richtung der z-y-Ebene. Die Flächennormale $\vec{n}$ erhält man über

$$\vec{n} = \vec{e}_b \times \vec{e}_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sin\Theta \\ \cos\Theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\Theta \\ \sin\Theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für das Dipolmoment ergibt sich als insgesamt

$$\vec{p}_m = I \cdot \vec{A} = I \cdot A \cdot \vec{n} = 1,54 \cdot 10^{-2}Am^2 \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b)

Für $\vec{B} = B\vec{e}_x$ mit $B = 1T$ ist die potentielle Energie

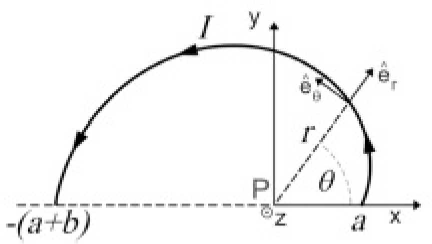
$$E_{Pot} = -\vec{p}_m \cdot \vec{B} = 1,54 \cdot 10^{-2} Am^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{Vs}{m^2} = 1,33 \cdot 10^{-2} J$$

Und das Drehmoment beträgt

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B} = 1,54 \cdot 10^{-2} Am^2 T \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -0,77 \cdot 10^{-2} J \vec{e}_z$$

Aufgabe 10

Gegeben sei ein Draht mit der Form einer Archimedischen Spule.



Die Gleichung, dieser Leiterkonfiguration wird beschrieben durch

$$r(\Theta) = a + \frac{b}{\pi}\Theta \text{ für } 0 \leq \Theta \leq \pi$$

wobei Θ der Winkel von der x-Achse aus gesehen ist(im Bogenmaß). Der Punkt P befindet sich im Ursprung des xy-Koordinatensystems. $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\phi$ sind die Einheitsvektoren in radialer und azimutaler Richtung. Der Draht wird vom Strom I in der Abbildung angegebenen Richtung durchflossen. Berechnen Sie das Magnetfeld B im Punkt P.

Lösung 10

Wir machen einen Ansatz, indem wir das von einem kleinen Stück des Drahtes erzeugte Magnetfeld berechnen. Dann wird mit dem Biot-Savart'schen Gesetz das Magnetfeld folgendermaßen berechnet

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{s}\times\vec{r}}{r^2}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{r^2}(dr\vec{e}_r+rd\Theta\vec{e}_\Theta\times(-\vec{e}_r)=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{rd\Theta}{r^2}\vec{e}_r\times\vec{e}_\Theta=$$
$$\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{rd\Theta}{r^2}\vec{k}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\Theta}{r}\vec{k}$$

Nun muss noch$r(\Theta)$ in die Gleichung einsetzen und integrieren um das Magnetfeld am Punkt P zu finden

$$B=\vec{k}\int_0^\pi\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\Theta}{r}=\vec{k}\int_0^\pi\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\Theta}{\left(a+\frac{b}{\pi}\Theta\right)}=\vec{k}\int_0^\pi\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\pi}{b}\left[ln\left(a+\frac{b}{\pi}\Theta\right)\right]_0^\pi=$$
$$\vec{k}\frac{\pi}{b}\frac{\mu_0 I}{4\pi}ln\left(1+\frac{b}{a}\right)$$

Aufgabe 11

In einem kartesischen Koordinatensystem ist der Halbraum $z<0$ mit einem magnetisierbaren Material der Permeabilitätszahl μ_r gefüllt, der Halbraum $z>0$ ist leer. Auf der magnetisierbaren Oberfläche verläuft entlang der y-Achse ein unendlich langer gerader Draht mit vernachlässigbarem Querschnitt, durch den ein konstanter Strom der Stärke I in positive y-Richtung fließt. Bestimmen sie H,H und M in den beiden Halbräumen. Hinweis: Nehmen sie an, dass H, B und M die Form $\vec{H}(r)=H_a(r)\vec{e}_\phi$ im Außenraum bzw. $\vec{H}(r)=H_i(r)\vec{e}_\phi$ im Innenraum haben. Wobei r der Abstand zum Draht und ϕ der Winkel um die y-Achse ist.

Lösung 11

Das modifizierte Ampéresche Gesetz

$$\int_{\partial A}d\vec{r}\cdot\vec{H}=\int_A d\vec{S}\cdot\vec{j}$$

führt mit dem Ansatz

$$\vec{H}(\vec{r})=H_a(r)\vec{e}_\phi \text{ bzw. } \vec{H}(\vec{r})=H_i(r)\vec{e}_\phi$$

und einem Kreis vom Radius r um den Draht als Integrationsweg auf

$$\pi r H_a(r)+\pi r H_i(r)=I$$

Es fehlt noch der Zusammenhang zwischen Innen- und Außenfeld. Wegen $\vec{\nabla}*\vec{B}=0$ muss die Normalkomponente von $\vec{B}$ beim Übergang von Materie ins Vakuum stetig sein, also auf der Grenzfläche

$$B_i = B_a$$

Mit dem Zusammenhang zwischen
Zusammen mit der obigen Gleichung sind das zwei Gleichungen, für die beiden Unbekannten H$_i und H_a mit der Lösung$

$$H_a(r) = \frac{\mu_r}{1+\mu_r}\frac{I}{\pi r}$$
$$\mathrm{H}_a(r) = \frac{1}{1+\mu_r}\frac{I}{\pi r}$$

Daraus nun B$_a und B_i$:

$$B_a(r) = \frac{\mu_r}{1+\mu_r}\frac{\mu_0 I}{\pi r} = B_i(r)$$

Zum Schluss ergibt sich die Magnetisierung $\vec{M}$ aus der Definition von $\vec{H}$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}$$

zu

$$M_a(r) = 0$$
$$\mathrm{M}_i(r) = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1}\frac{I}{\pi r}$$