Ferienkurs Sommersemester 2011

Experimentalphysik II

Elektrostatik - Lösung

Steffen Maurus

1 Elektrostatik

Aufgabe 1

Zum Lösen der Aufgabe braucht man folgende geometrische Beziehungen: $\frac{x}{2} = L\sin\theta$ und $F_{el}cos\theta = F_g sin\theta$. Daraus folgt:

$\frac{q^2\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 x^2} = mg\sin\theta$
$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 x^2} = mg\tan\theta \approx mg\sin\theta = \frac{xmg}{2L}$ und schließlich
$x = \left(\frac{q^2 L}{2\pi\epsilon_0 mg}\right)^{\frac{1}{3}}$

Aufgabe 2

Die Bedingung die hier erfüllt werde muss ist, das die Gravitationskraft gleich der elektrischen Kraft ist:

$F_G = F_{el} \rightarrow \frac{GM_eM_m}{r^2} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$
$\rightarrow Q = \sqrt{GM_eM_m 4\pi\epsilon_0} = 5,7\cdot 10^{13}C$

Nun war noch nach der Masse gefragt. Wir wissen, dass ein ionisiertes Wasserstoff ein Proton hat, also $1,6 * 10^{-19}$C.

$\rightarrow \frac{Q}{e} = \frac{5,7\cdot 10^{13}C}{1,6\cdot 10^{-19}C} = 3,6\cdot 10^{32}$ Ionen

Nun ein letzter Schritt: $m = 1,66\cdot 10^{-27}$kg$*3,6\cdot 10^{36} = 6\cdot 10^5$kg.
Dies scheint sehr wenig Masse zu sein, im Vergleich zu den beiden Massen der Planeten. Dies kommt daher, da die EM-Kraft um ca. 40 Größenordnungen stärker ist. Die Ergebnisses sind also Sinnvoll.

Aufgabe 3

Zuerst muss die passende Ladungsdichte bestimmt werden. Wir wissen, dass der Ring eine Gesamtladung hat die wir mit q bezeichnen. Daraus folgt $\lambda = \frac{q}{2\pi R}$ Also folgt für ein Ladungselement dq=λds. Das Differential ergibt also:

$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\vec{r}-\vec{r^{\text{‘}}})}{|\vec{r}-\vec{r^{\text{‘}}}|^3}\lambda ds$

Nun mus man den Hinweis benutzen:

$ds = Rd\phi$ und $\vec{r} = \begin{pmatrix} rcos\phi \\ rsin\phi \\ z \end{pmatrix}$

Da der Ring in der xy-Ebene liegt folgt:

$$(\vec{r}-\vec{r^{\text{‘}}}) = \begin{pmatrix} rcos\phi - r^{\text{‘}}cos\phi^{\text{‘}} \\ rsin\phi - r^{\text{‘}}sin\phi^{\text{‘}} \\ z - z^{\text{‘}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Rcos\phi^{\text{‘}} \\ -Rsin\phi^{\text{‘}} \\ z \end{pmatrix} \rightarrow |\vec{r}-\vec{r^{\text{‘}}}| = \sqrt{R^2+z^2}$$

Nun sind wir so weit das Integral hinzuschreiben:

$$\vec{E} = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi` \frac{1}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} -Rcos\phi` \\ -Rsin\phi` \\ z \end{pmatrix} = \frac{2\pi\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 (R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z$$

Aufgabe 4

(a)Wir legen eine zylindrische Gauß'sche Oberfläche der Länge L und mit Radius r um die gesamte Anordnung. Aus Symmetriegründen muss das E-Feld überall auf der Oberfläche senkrecht stehen und parallel zum Normalenvektor sein, also wird das Flußintegral besonders einfach. Die eingeschlossene Ladung ist gerade Q = q - 2q = -q, und

$$\int \vec{E} d\vec{A} = EA = E2\pi rL = \frac{-q}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{E} = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0 rL} \vec{e}_r$$

Das Minuszeichen deutet an, dass das E-Feld nach Innen gerichtet ist.
(b) Wir legen eine zylindrische Gauß'sche Oberfläche in die Röhre rein, so dass sie die innere Seite mit einschliesst, nicht jedoch die äußere. Da wir uns in einem Leiter befinden, ist das Feld 0, also muss auch die enthaltene Ladung gleich 0 sein. Auf dem inneren Zylinder befindet sich die Ladung q, folglich liegt auf der innerenWand der Röhre die Ladung -q. Nach Außen hin muss die Anordnung die Gesamtladung -q vorzeigen, also muss auf der äußeren Oberfläche nochmals die Ladung -q liegen.
(c) Überlegung ist völlig analog zu (a), nur dass der Zylinder diesmal nur den inneren Stab und somit die Ladung q einschliesst. Also ist das Feld

$$\vec{E} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 rL} \vec{e}_r$$

Aufgabe 5

1. Die Ladungsdichte ist gerade $\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ und die eingeschlossene Ladung innerhalb einer Gauß'schen Fläche des Radius r<R ist dann $Q = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = q\frac{r^3}{R^3}$. Für das Feld folgt aus $\int \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$.
a) Es sei nun $\Phi = 0$ bei r=0.
i. Die Abhängigkeit des Potentials erhält man über

$$\Phi(r) - \Phi(0) = -\int_0^r E dR$$

$$\Phi(r) - 0 = -\int_0^r \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \rightarrow \Phi(r) = -\frac{qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3}$$

ii. Da $\Phi(0) = 0$ ist jedes mit dem Ergebnis aus i) berechnete Potential gerade die Potentialdifferenz zum Mittelpunkt, für r=R folgt:

$$\Phi(R) = -\frac{q}{8\pi\epsilon_0 R}$$

iii. Alle Punkte außerhalb des Ursprunges haben negatives Potential, also ist der Ursprung gerade der Punkt des höchsten Potentials.
b) Hier müssen wir zur Bestimmung des Potentials anders vorgehen. Wir kennen die Formel für die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten, im Speziellen gilt hier deshalb:

$\Phi(R) - \Phi(r) = -\int\limits_r^R E dr = -\int\limits_r^R \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} = -\frac{q}{8\pi\epsilon_0 R^3}(R^2 - r^2)$

Die linke Seite enthält aber auch das bekannte Potential auf der Oberfläche einer Punktladung, nämlich $\Phi(R)$, also ist

$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} - \Phi(r) = -\frac{q}{8\pi\epsilon_0 R^3}(R^2 - r^2) \rightarrow \Phi(r) = \frac{q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}$

Die Potentialdifferenz zum Ursprung ist

$\Phi(R) - \Phi(0) = \frac{2q}{8\pi\epsilon_0 R} - \frac{3q}{8\pi\epsilon_0 R} = \frac{-q}{8\pi\epsilon_0 R}$

Das Potential innerhalb der Kugel ist also anders als das in a) bestimmte, die Differenz zwischen Oberfläche und Ursprung aber gleich. Dies liegt ganz einfach an der Definition des Nullpunkts. Die Angabe eines absoluten Potentials ist direkt von diesem Abhängig, bei einer Differenz kürzen sich die Eichfaktoren jedoch raus.

Aufgabe 6

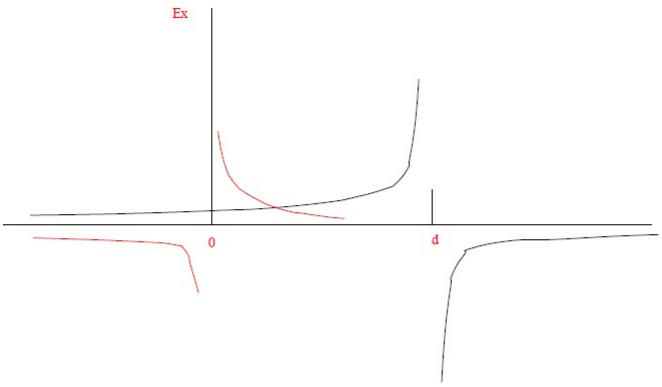
Wir setzen $x_1 = 0, x_2 = 50cm$. Da die beiden Ladungen unterschiedliche Vorzeichen haben, kann sich die Gleichgewichtslage nicht dazwischen befinden. Ferner muss sie näher bei q1 sein, da dies die schwächere Ladung ist. Ferne gilt Superposition und aufgrund der 1-dimensionalität können wir das E-Feld als Skalar schreiben:

$E = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{4}{(x-x_2)^2}\right) = 0 \rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{4}{(x-x_2)^2} \rightarrow x - x_2 = 2x \rightarrow x = -x_2$

Also ist die Gleichgewichtslage bei x=-50cm.

Aufgabe 7

a)klar
b)



Dabei ist das resultierende E-Feld eine Addition aus der roten Ladung q und den schwarzen E-Feld Linien (-4q).

c)für x<0:

$E_x(X) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{-1}{x^2} + \frac{4}{(x-d)^2}\right)$

Für 0<x<d:

$E_x(X) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{(x-d)^2}\right)$

Für x>d:

$E_x(X) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{4}{(x-d)^2}\right)$

d)Nullstelle nur für x<0 möglich:

$\frac{1}{x^2} = \frac{4}{(x-d)^2} \rightarrow x^2 - 2dx + d^2 = 4x^2 \rightarrow x^2 + \frac{2}{3}dx - \frac{1}{3}d^2 = 0 \rightarrow x_{1,2} = -\frac{d}{3} \pm \frac{2d}{3}$

Sinn ergibt nur x1=-d.

2 Kondensatoren

Aufgabe 1

Zuerst muss das E-Feld berechnet werden:

$\int \vec{E}d\vec{A} = \int \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{q}{2\pi r L\epsilon_0}$

zu beachten ist hierbei, dass q die Ladung auf dem Inneren Zylinder ist. Daraus wird die Spannung ermittelt:

$U = \int\limits_a^b Edr = \frac{q}{2\pi L\epsilon_0}\ln\frac{b}{a}$

Die Kapazität ist dann:

$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{\frac{q}{2\pi L\epsilon_0}\ln\frac{b}{a}} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\frac{b}{a}}$

Aufgabe 2

Gleiches vorgehen wie bei der vorherigen Aufgabe:

$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \rightarrow U = \int\limits_a^b Edr = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{b-a}{ab}\right)$

Und damit C:

$C = \frac{q}{U} = 4\pi\epsilon_0\frac{ab}{b-a}$

Nun muss noch die Kapazität der Erde berechnet werden. Wir nehmen an das a=R_e=6370km ist und schreiben:

$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{a}{1-\frac{a}{b}}$

Nun lassen wir die Grenze b gegen unendlich streben.$\rightarrow C_e = 4\pi\epsilon_0 R_e = 0,71\mu C$

Aufgabe 3

Die beiden parallel geschalteten Kondensatoren C_1 und C_2 besitzen eine Gesamtkapazität von:

$C_{\|} = C_1 + C_2$

Diese wiederum sind in Reihe mit einer weiteren Kapazität C_1 geschaltet, womit füt die Gesamtkapazität folgt:

$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1+C_2} \rightarrow C = \frac{C_1(C_1+C_2)}{2C_1+C_2}$

Für diese soll aber gelten:

$C = C_2 \rightarrow C_2 \cdot (2C_1 + C_2) = C_1(C_1 + C_2) \rightarrow C_2^2 + C_1 \cdot C_2 - C_1^2 = 0$

Mithilfe der quadratischen Lösungsformel bekommt man:

$C_2 = \frac{1}{2}C_1(-1 \pm \sqrt{5})$

Da Kapazitäten natürlich nicht negativ sein können. fällt eine Lösung raus. Die gesuchte ist also:

$C_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)c_1 \approx 0,618C_1.$

Aufgabe 4

a) Jede kleine Ladung überträgt die potentielle Energie dqU:

$dW = dq \cdot U \rightarrow \int\limits_0^Q U dq = \int\limits_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CU^2$

b)$E = \frac{U}{d}$ mit $C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$ folgt $E = \frac{UC}{\epsilon_0 A}$

Jetzt brauchen wir die Energiedichte:

$\omega_{el} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{U^2C^2}{\epsilon_0^2 A^2}$

Nun muss noch über das Volumen integriert werden:

$W = \int \omega_{el} dV = Ad\omega_{el} = \frac{1}{2}\frac{U^2C^2}{\epsilon_0 A}d = \frac{1}{2}CU^2$

Aufgabe 5

a)Parallelschaltung: Es müssen 2 Spannungen berechnet werden, für jedes Dielektrikum eine eigene:

$U_i = \int E_i ds = E_i d = \frac{E_0 d}{\epsilon_i}$

Nun muss man noch wissen wie sich die Gesamtspannung zusammen setzt. Hierbei wird das Gesetz für Parallele Widerstände benutzt:

$U = \frac{1}{\frac{1}{U_1}+\frac{1}{U_2}} = E_0 d \frac{1}{\epsilon_1+\epsilon_2}$

Nun ist:

$C = \frac{q}{U} = \frac{E_0 A \epsilon_0}{E_0 d \frac{1}{\epsilon_1+\epsilon_2}} = \epsilon_0(\epsilon_1+\epsilon_2)\frac{A}{d}$

Nehmen wir 2 getrennte Kondensatoren an folgt:

$C = C_1 + C_2 = \epsilon_0\epsilon_1\frac{A}{d} + \epsilon_0\epsilon_2\frac{A}{d}$

b)Reihenschaltung: Wiederum muss zuerst die Spannung berechnet werden. Wir nehmen an die Dielektrika haben die Dicken d_1 und d_2:

$U = \int Eds = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{E_0}{\epsilon_1} d_1 + \frac{E_0}{\epsilon_2} d_2 = E_0\left(\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2}\right)$

Wenn wir wieder die Serienschaltung-Regel annehmen:

$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon_0\epsilon_1 A" d_1} + \frac{1}{\epsilon_0\epsilon_2} A" d_2} = \epsilon_0 \frac{A}{\left(\frac{d_1}{\epsilon_1}+\frac{d_2}{\epsilon_2}\right)}$

3 Der elektrische Strom

Aufgabe 1

a)Aus der Zylindersymmetrie und der Spannung($\int \vec{E} d\vec{s}$) folgt:

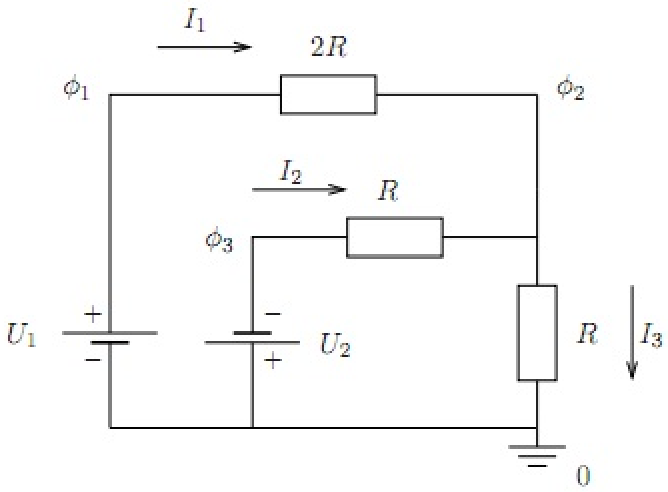
$\vec{E} = -E\vec{e}_z$
b)Durch Flächenintegration des Flächenelementes $d\vec{A} = rdrd\phi$ folgt in z-Richtung:

$I = \int_0^{2\pi}\int_0^R j(r) rdrd\phi = 2\pi j_0 \int_0^R 2r - \frac{r^3}{R^2} dr = \frac{3\pi j_0 R^2}{2}$
c)$P = UI = U\frac{3\pi j_0 R^2}{2}$

d)$\rho(r) = \frac{j(r)}{E} = \frac{L}{U} j_0 (2 - \left(\frac{r}{R}\right)^2) = \rho_0 (2 - \left(\frac{r}{R}\right)^2)$

e)$\vec{v}_e = \frac{e\vec{E}\tau_e}{m_e} = -\mu_e \vec{E} = \mu_e \frac{U}{L}\vec{e}_z$

Aufgabe 2



In der folgenden Abbildung ist das Netzwerk mit den Potentialpunkten ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 und einer Konvention für die positiven Stromrichtungen dargestellt. Gesucht ist ϕ_2.
Nun wird die Maschenregel angewendet:

$\phi_1 - \phi_2 = 2RI_1$
$\phi_2 - 0 = RI_3$
$0 - \phi_1 = -U_1$

also in Summe:

$0 = 2RI_1 + RI_3 - U_1$

Dasselbe Spiel für die innere Masche:

$\phi_3 - \phi_2 = RI_2$
$\phi_2 - 0 = RI_3$
$0 - \phi_3 = U_2$

aufsummiert also:

$R = RI_2 + RI_3 + U_2$

Eine weitere Gleichung liefert die Knotenregel:

$I_3 = I_1 + I_2$

Damit werden beide Maschengleichungen werden zu:

$3RI_1 + RI_2 = U_1$
$RI_1 + 2RI_2 = -U_2$

nach I_1 aufgelöst ergibt dies:

$I_1 = \frac{1}{5R}(2U_1 + U_2)$

und daraus folgt das gesuchte ϕ_2:

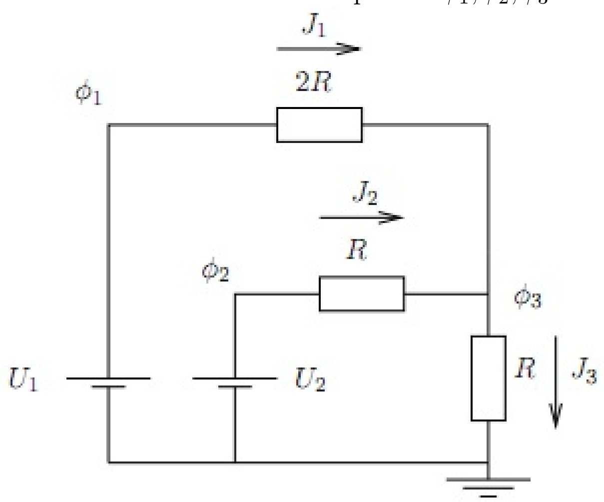
$\phi_2 = \phi_1 - 2RI_1 = U_1 - \frac{2}{5}(2U_1 + U_2) = \frac{1}{5}(U_1 - 2U_2)$

Einsetzten der Zahlenwerte für U1=6V und U2=4V ergibt:

$\phi_2 = -0,4V$

Aufgabe 3

Es ist sehr hilfreich (aber nicht notwendig), wenn man erkennt, dass die beiden oberen R zu einem 2R zusammengefasst werden konnen. Dann kann man die positiven Stromrichtungen z.B. wie in der folgenden Abbildung festlegen und zeichnet noch die Potentialpunkte ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 ein:



Wieder gehts mit der äußeren Masche los:

$\phi_1 - \phi_3 = 2RJ1$
$\phi_3 - 0 = RJ_3$
$0 - \phi_1 = -U_1$

also in Summe:

$0 = 2RJ_1 + RJ_3 - U_1$

Nun gehts an die innere Masche:

$\phi_4 - \phi_3 = RJ_2$
$\phi - 0 = RJ_3$
$0 - \phi_4 = -U_2$

und in Summe:

$0 = RJ_2 + RJ_3 - U_2$

Jetzt noch die Knoten:

$J_1 + J_2 = J_3$

Zusammen sind dies 3 Gleichungen für die Unbekannten J_1, J_2, J_3 die man problemlos auflösen kann. Hier geht es aber nur um die Frage, unter welchen Bedingung an U_1 und U_2 der Strom $J_1 = 0$ ist. Also setzt man $J_1 = 0$ in die 3. Gleichung ein und erhält:

$RJ_3 = U_1$
$RJ_2 + RJ_3 = U_2$
$J_2 = J_3$

Daraus folgt:

$RJ_3 = U_1$
$2RJ_3 = U_2$

also:

$\frac{U_2}{U_1} = 2$