Aufgabe 1 *Laplace Transformation*

Lösung:

a) Zeigen Sie dass für die Laplace-Transformierte der $n-$ten Ableitung gilt:

$$\mathcal{L}\frac{d^n}{dx^n}f(x) = z^n\hat{f}(z) - \sum_{j=1}^{n} f^{(j-1)}(0)z^{n-j}$$

Die Gültigkeit der Formel lässt sich mittels vollständiger Induktion zeigen:

- Induktionsanfang: Für $n = 1$

$$\mathcal{L}\frac{d}{dx}f(x) = \int_0^\infty dx \exp(-zx\frac{d}{dx}f(x) = \exp(-zx)f(x)|_0^\infty + z\int_0^\infty \exp(-zx)f(x)dx = -f(0) + z\hat{f}(z)$$

- Induktionsschritt $n \to n+1$

$$\mathcal{L}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}f(x) = \int_0^\infty dx \exp(-zx)\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}f(x) \overset{p.I.}{=} \exp(-zx)\frac{d^n}{dx^n}f(x)\bigg|_0^\infty + z\int_0^\infty dx \exp(-zx)\frac{d^n}{x^n}f(x) =$$

$$\overset{I.V}{=} -f^{(n)}(0) + z\left(z^n\hat{f}(z) - \sum_{j=1}^{n} f^{(j-1)}(0)z^{n-j}\right) = z^{n+1}\hat{f}(z) - \sum_{j=1}^{n+1} f^{(j-1)}(0)z^{n+1-j}$$

b) Berechnen Sie:

$$\left(\mathcal{L}cos(x)\right)(z) = \int_0^\infty dx \exp(-zx)\frac{1}{2}\left(\exp(ix) + \exp(-ix)\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\exp((i-z)x)}{i-z} - \frac{\exp(-(i+z)x)}{i+z}\right]_{x=0}^\infty = \frac{1}{2}\frac{1}{i-z} - \frac{1}{2}\frac{1}{i+z} =$$

c) Benutzen sie die Laplace-Transformation um die folgende Differentialgleichung zu lösen

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 0$$

Die Transformation liefert

$$z^2\hat{y}(z) - zy(0) - y'(0) - 5(z\hat{y}(z) - y(0)) + 6\hat{y}(z) = 0$$

$$\Rightarrow \hat{y}(z) = \frac{zy(0) + y'(0) - 5y(0)}{z^2 - 5z + 6}$$

Mittels der Partialbruchzerlegung

$$\frac{zy(0) + y'(0) - 5y(0)}{z^2 - 5z + 9} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-3}$$

lässt sich dies zerlegen in

$$\hat{y}(z) = \frac{-y'(0) + 3y(0)}{z-2} + \frac{y'(0) - 2y(0)}{z-3}$$

Vergleicht man dies mit dem Ergebnis für die Transformation einer Exponentialfunktion so erhält man

$$y(x) = (3y(0) - y'(0))\exp(2x) + (y'(0) - 2y(0))\exp(3x)$$

Aufgabe 2 *Separation der Variablen*

Lösung:

a) $x(t)\dot{x}(t) = 12t^2$

$$x(t)dx = 12t^2 dt \qquad \Rightarrow x^2(t) = 8t^3 + c \qquad x(t) = \pm\sqrt{8t^3 + c}$$

b) $\dot{x}(t)(x(t)+1)^2 + t^3 = 0$

$$(x(t)+1)^2 dx = -t^3 dt \qquad \Rightarrow \frac{1}{3}(x+1)^3 = -\frac{1}{4}t^4 + c \qquad \to x(t) = \left(c - \frac{3}{4}t^4\right)^{1/3} - 1$$

c) $t^{-t} = \frac{\ln(t)}{\dot{x}(t)} + \frac{1}{\dot{x}(t)}$

$$\dot{x}(t) = \ln(t)t^t + t^t = \ln(t)\exp(t\ln(t)) + \exp(t\ln(t))$$

Mit der Substitution

$$u = t\ln(t); \qquad du = dt(\ln(t)+1)$$

lässt sich das Integral lösen

$$x = \int du\, exp(u) \to x(t) = t^t + c$$

Aufgabe 3 *Integrierender Faktor*

Finden Sie ein integrierenden Faktor um die folgende Differentialgleichung zu lösen:

$$t^2 + x^2(t) + t + tx(t)\dot{x}(t) = 0$$

Lösung:

$$x(t)(x(t) + t\dot{x}(t)) = -t^2 - t$$

Leitet man $tx(t)$ nach t ab:

$$\frac{d}{dt}(tx(t)) = x(t) + t\dot{x}(t)$$

Der Integrierende Faktor ist also in diesem Fall t. Substituiert man $tx(t) = u(t)$ so erhält man

$$u(t)\dot{(u)} = -t^3 - t^2$$

Mittels Separation der Variablen folgt die Lösung der DGL zu

$$x(t) = \pm\frac{\sqrt{-18t^4 - 24t^3 + c}}{6t}$$

Aufgabe 4 *Potenzreihenansatz*

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

a) $(1+2t)\dot{x}(t) + 2x(t) - 1 = 0, \qquad x(0) = 0$ **Lösung**: Aus der Anfangsbedingung folgt sofort $a_0 = 0$
Setzt man nun den Ansatz in die DGL ein so erhält man

$$(1+2t)\sum_{n=1}^{\infty} a_n n t^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n - 1 = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n t^{n-1} + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n n t^n + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n - 1 = 0$$

Bei der letzten Summe würde die Anfangsbedingung benutzt. Ändert man nun in der 1. Summe den Summationsindex $n \to n+1$ und nimmt das 1. Element aus der Summe hinaus, so erhält man

$$(a_1 - 1) + \sum_{n=1}^{\infty}((n+1)a_{n+1} + 2(n+1)a_n)t^n = 0$$

Hieraus folgt

$$a_1 - 1 = 0$$
$$((n+1)a_{n+1} + 2(n+1)a_n) = 0 \qquad \text{für} n \geq 1$$

Die gesuchte Lösung ist also

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2^{n-1} t^n = t \sum_{n=0}^{\infty} (-2t)^n = \frac{t}{1+2t}$$

Diese existiert nur für $t < \frac{1}{2}$!

b) $t\dot{x}(t) = (t+2)x(t), \qquad x''(0) = 1$ Einsetzen des Ansatzes in die DGL liefert

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

Verschiebung des Summationsindexes bei der 2. Summe und Herausnehmen des 0. Elementes aus der 3. Summe liefert

$$-2a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} t^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$$

Es folgt also

$$(n-2)a_n = a_{n-1}$$
$$a_0 = 0$$
$$a_0 = 0 = (1-2)a_1 \qquad a_1 = 0$$
$$a_1 = 0 = (2-2)a_2 \qquad a_2 = \frac{1}{2} \text{ Aus Anfangsbedingung!}$$
$$a_n = \frac{1}{2} \frac{1}{(n-2)!}$$
$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} t^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+2}}{n!} = \frac{1}{2} t^2 \exp(t)$$

Aufgabe 5 *Fixpunkte*

Finden Sie für die folgenden Differentialgleichungen alle Fixpunkte und untersuchen Sie deren Stabilität

a) $\dot{x} = x^2 + 2y - 4$
$\dot{y} = -2xy$

b) $\ddot{x} = \sin(x)$

Lösung:

a) (i) Bestimmung der Fixpunkte
$0 = x^2 + 2y - 4$
$0 = -2xy \qquad \Rightarrow x = 0$ oder $y = 0$ mit der 1. Gleichung folgen dann die Fixpunkte $P_1 = (0, 2), P_2 = (2, 0), P_3 = (-2, 0)$

(ii) Bestimmung der Jacobi-Matrix

$$J(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2 \\ -2y & -2x \end{pmatrix}$$

(iii) Damit ergibt sich für die Fixpunkte:
$P_1 \qquad \lambda_{1,2} = \pm i 2\sqrt{2} \qquad \Rightarrow$ elliptischer Fixpunkt
$P_2 \qquad \lambda_{1,2} = \pm 4 \Rightarrow$ hyperbolischer Fixpunkt
Hier war ein Fehler im Skript hyperbolische Fixpunkte sind definiert durch:
$\mathrm{Im}(\lambda_j) \leq 0 \forall j \qquad \wedge \exists i, j : \mathrm{Re}\lambda_j) > 0, \mathrm{Re}\lambda_j) < 0$ der Fixpunkt ist *hyperbolisch*
$P_3 \qquad \lambda_{1,2} = \pm 4 \qquad \Rightarrow$ hyperbolischer Fixpunkt

b) Führt man ein $v = \dot{x}$ so erhält man:
$\dot{x} = v$
$\dot{v} = \sin(x)$
Die Fixpunkte ergeben sich also zu $v = 0; x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ Die Jacobi-Matrix lautet

$$J(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \cos(x) & 0 \end{pmatrix}$$

Für gerade k lauten die Eigenwerte also $\lambda_{1/2} = \pm 1 \Rightarrow$ hyperbolischer Fixpunkt
Für ungerade k lauten die Eigenwerte $\lambda_{1/2} = \pm i \Rightarrow$ elliptischer Fixpunkt

Aufgabe 6 *Existenz der Lösung*

Für welche der obigen Differentialgleichungen existieren globale Lösungen?
Lösung:
1c),4b),5b)