Christian Neumann

Aufgabe 1 *Laplace Transformation*

Gegeben sei eine Funktion f, die Laplace-transformierbar ist und der Wert aller Ableitungen von f im Ursprung.

a) Zeigen Sie dass für die Laplace-Transformierte der $n-$ten Ableitung gilt:

$$\mathcal{L}\frac{d^n}{dx^n}f(x) = z^n\hat{f}(z) - \sum_{j=1}^{n} f^{(j-1)}(0)z^{n-j}$$

b) Berechnen Sie:

$$\mathcal{L}cos(x)$$

c) Benutzen sie die Laplace-Transformation um die folgende Differentialgleichung zu lösen

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 0$$

Aufgabe 2 *Separation der Variablen*

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen durch Separation der Variablen

a) $x(t)\dot{x}(t) = 12t^2$

b) $\dot{x}(t)(x(t)+1)^2 + t^3 = 0$

c) $t^{-t} = \frac{\ln(t)}{\dot{x}(t)} + \frac{1}{\dot{x}(t)}$
Hinweis: $t^t = \exp(t\ln(t))$

Aufgabe 3 *Integrierender Faktor*

Finden Sie ein integrierenden Faktor um die folgende Differentialgleichung zu lösen:

$$t^2 + x^2(t) + t + tx(t)\dot{x}(t) = 0$$

Aufgabe 4 *Potenzreihenansatz*

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen mit dem Potenzreihenansatz

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

a) $(1+2t)\dot{x}(t) + 2x(t) - 1 = 0, \qquad x(0) = 0$

b) $t\dot{x}(t) = (t+2)x(t), \qquad x''(0) = 1$

Aufgabe 5 *Fixpunkte*

Finden Sie für die folgenden Differentialgleichungen alle Fixpunkte und untersuchen Sie deren Stabilität

a) $\dot{x} = x^2 + 2y - 4$
$\dot{y} = -2xy$

b) $\ddot{x} = \sin(x)$

Aufgabe 6 *Existenz der Lösung*

Für welche der obigen Differentialgleichungen existieren globale Lösungen?