TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

CHRISTOPH NIEHOFF
MUSTERLÖSUNG DONNERSTAG

FERIENKURS ANALYSIS 2 FÜR PHYSIKER
SS 2011

Aufgabe 1.

Lösung: Da $\{(x,y)\colon x^2+y^2 \leq 1\}$ kompakt ist und f stetig ist, existiert ein Minimum. Die Minimalstelle liegt nicht im Inneren $\{x^2+y^2<1\}$, da $\operatorname{grad} f(x,y) = (4,2y) \neq 0$ ist für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alle Minimalstellen müssen also auf dem Rand $\{(x,y)\colon x^2+y^2=1\}$ liegen. Notwendig ist also, dass ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \lambda \operatorname{grad} h(x,y)$$

existiert, wobei $h(x,y) = x^2+y^2-1$ ist. Es ist also

$$4 = \lambda \cdot 2x\,, \quad 2y = \lambda \cdot 2y\,, \quad 1 = x^2+y^2$$

zu lösen, da $\operatorname{grad} h(x,y) \neq 0$ auf $\{x^2+y^2=1\}$ gilt. Es ist $\lambda \neq 1$, sonst wäre $4 = 2x$, also $x^2 > 1$. Damit aber folgt aus der zweiten Gleichung $y = 0$. Daher ist $x \in \{-1,1\}$. Wegen

$$f(-1,0) = -4, \quad f(1,0) = 4$$

folgt nun, dass das Minimum an der Stelle $(-1,0)$ angenommen wird.

Aufgabe 2.

Lösung: Man kann o. B. d. A. $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ und $0 \leq z \leq c$ annehmen. Aufgrund der Kompaktheit existiert folglich das Minimum. Weiter ist offensichtlich, dass an der Maximalstelle sogar $0 < x < a$, $0 < y < b$ und $0 < z < c$ gelten.

a) Es ist

$$f(x,y,z) - \lambda\, g(x,y,z) = 8xyz - \frac{\lambda}{a^2}x^2 - \frac{\lambda}{b^2}y^2 - \frac{\lambda}{c^2}z^2 + \lambda\,.$$

Folglich ist der Gradient genau dann gleich 0, wenn

$$(\mathrm{I})\ 8yz - \frac{2\lambda}{a^2}x = 0\,, (\mathrm{II})\ 8xz - \frac{2\lambda}{b^2}y \quad \text{und} \quad (\mathrm{III})\ 8xy - \frac{2\lambda}{c^2}z = 0\,.$$

Hieraus folgt

$$(\mathrm{I}),(\mathrm{III}) \rightarrow 8x\left(\frac{8c^2}{2\lambda}xy\right) = \frac{2\lambda}{b^2}y\,, \quad \text{also} \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 = \left(\frac{\lambda}{4abc}\right)^2.$$

Analog folgen

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{\lambda}{4abc}\right)^2 \quad \text{und} \quad \left(\frac{z}{c}\right)^2 = \left(\frac{\lambda}{4abc}\right)^2.$$

Aus der Nebenbedingung folgt damit

$$3\left(\frac{\lambda}{4abc}\right)^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{4}{3}\sqrt{3}\,abc\,.$$

Es ergibt sich folglich die Maximalstelle

$$(x,y,z) = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,(a,b,c)\,.$$

mit Maximalwert $f(x,y,z) = 8xyz = \frac{8}{9}\sqrt{3}\,abc$

Aufgabe 3.

Das Gleichungssystem ist von der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Zuerst berechnen wir das Matrixexponential.
das charakteristische Polynom ist $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$. Damit ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = +1$, was auf die Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

führt. Damit ergibt sich ein Matrixexponential

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}$$

Damit ist die allgemeine Lösung des homogenen Systems

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}_{\text{homogen}} = \begin{pmatrix} \cosh(t-t_0) & \sinh(t-t_0) \\ \sinh(t-t_0) & \cosh(t-t_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0\cosh(t-t_0) + y_0\sinh(t-t_0) \\ x_0\sinh(t-t_0) + y_0\cosh(t-t_0) \end{pmatrix}.$$

Jetzt berechnen wir die spezielle Lösung des inhomogenen Systems

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}_{\text{spez}} &= \int_{t_0}^{t} \exp((t-s)A)\zeta(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} \cosh(t-s) & \sinh(t-s) \\ \sinh(t-s) & \cosh(t-s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \sin(s) \end{pmatrix}\mathrm{d}s \\
&= \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} \cosh(t-s) + \sinh(t-s)\sin(s) \\ \sinh(t-s) + \cosh(t-s)\sin(s) \end{pmatrix}\mathrm{d}s \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(-\sin(t) + (2+\cos(t_0))\sinh(t-t_0) + \sin(t_0)\cosh(t-t_0)\right) \\ \frac{1}{2}\left(-2 - \cos(t) + (2+\cos(t_0))\cosh(t-t_0) + \sin(t_0)\sinh(t-t_0)\right) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

dabei haben wir folgende Identitäten verwendet

$$\sinh(t-s) = \sinh(t)\cosh(s) - \cosh(t)\sinh(s), \quad \cosh(t-s) = \cosh(t)\cosh(s) - \sinh(t)\sinh(s).$$

Dann ergibt sich die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}_{\text{homogen}} + \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}_{\text{spez}} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(-\sin(t) + (2+2y_0+\cos(t_0))\sinh(t-t_0) + (\sin(t_0)+2x_0)\cosh(t-t_0)\right) \\ \frac{1}{2}\left(-2 - \cos(t) + (2+2y_0+\cos(t_0))\cosh(t-t_0) + (\sin(t_0)+2x_0)\sinh(t-t_0)\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.

Wir lesen sofort das charakteristische Polynom ab

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2.$$

Dieses hat die Nullstellen $\lambda_1 = +1$, $\lambda_2 = -2$ und $\lambda_3 = -1$. Deshalb erhalten wir

$$\phi(t) = C_1\exp(t) + C_2\exp(-2t) + C_3\exp(-t).$$

Die Konstanten C_i müssen aus den Nebenbedingungen bestimmt werden. Dies führt auf ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{cases} \phi(0) = 0 \\ \dot\phi(0) = 0 \\ \phi(1) = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ \mathrm{e}^1 & \mathrm{e}^{-2} & \mathrm{e}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dieses LGS hat die Lösungen $C_1 = \frac{\mathrm{e}^2}{(\mathrm{e}^1-1)^2(\mathrm{e}^1+2)}$, $C_2 = \frac{2\mathrm{e}^2}{(\mathrm{e}^1-1)^2(\mathrm{e}^1+2)}$ und $C_3 = -\frac{3\mathrm{e}^2}{(\mathrm{e}^1-1)^2(\mathrm{e}^1+2)}$. Damit ist unsere gesuchte Lösung:

$$\phi(t) = \frac{\mathrm{e}^2}{(\mathrm{e}^1-1)^2(\mathrm{e}^1+2)}\left(\exp(t) + 2\exp(-2t) - 3\exp(-t)\right).$$

Aufgabe 5.

Das Gleichungssystem lässt sich in der Form

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

darstellen. Wit müssen also das Matrixexponential von A berechnen.
Dazu diagonalisieren wir A zuerst. Da die Matrix Dreiecksgestallt hat, ergibt sich das charakteristische Polynom direkt

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = (1-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda).$$

Die Nullstellen hiervon sind die Eigenwerte λ_i von A: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = 2$.
Der i-te Eigenvektoren ergibt sich durch Lösen des Gleichungssystems $(A - \lambda_i \mathbb{1})\, v_i = \vec{0}$.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit erhält man die Transformationsmatrix $\mathcal{T}$

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit kann nun das Matrixexponential berechnet werden:

$$\exp(tA) = \mathcal{T} \operatorname{diag}\left(\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^{-t}, \mathrm{e}^{2t}\right) \mathcal{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^t & -2\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{2t} \\ 0 & \mathrm{e}^{-t} & -2\mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{2t} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}$$

Nun muss noch der Anfangswert eingesetzt werden und man erhält die Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^t & -2\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{2t} \\ 0 & \mathrm{e}^{-t} & -2\mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{2t} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^{2t} + 2\mathrm{e}^t - 4\mathrm{e}^{-t} \\ 6\mathrm{e}^{2t} - 4\mathrm{e}^{-t} \\ 3\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6.

Aus dem Wirkungsintegral lesen wir direkt die Lagrangefunktion ab (wir betrachten hier nur eine Dimension)

$$\mathcal{L}(x, v, t) = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

wobei wir nun die Notation $v = \dot{x}$ verwendet.
Dieses setzen wir nun in die Euler-Lagrange-Gleichung ein

$$\underbrace{\partial_x \mathcal{L}}_{=0} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \partial_v \mathcal{L} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = -m_0 \underbrace{\left[\frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{v^2}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2} \right]}_{\neq 0} \dot{v} = 0$$

Der Ausdruck in eckigen Klammern ist ungleich Null, darum muss

$$\dot{v} = \ddot{x} = 0$$

gelten, was eine lineare Bewegung bedeutet.

Aufgabe 7.

Wir lesen die Lagrangefunktion ab

$$\mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, t) = m\dot{\varphi}^2 \left(1 - \cos(\varphi)\right) - mg \left(1 + \cos(\varphi)\right).$$

Da dieses Problem eindimensional ist, sind die Gradienten in den Euler-Lagrange-Gleichungen einfache partielle Ableitungen.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi}\mathcal{L} &= m\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) + mg\sin(\varphi) \\ \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}\mathcal{L} &= 2m\left(1 - \cos(\varphi)\right)\dot{\varphi} \end{aligned}$$

Damit errechnen sich die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi}\mathcal{L} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}\mathcal{L} &= m\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) + mg\sin(\varphi) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(2m\left(1 - \cos(\varphi)\right)\dot{\varphi}\right) \\ &= m\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) + mg\sin(\varphi) - 2m\sin(\varphi)\dot{\varphi}^2 - \left(2m\left(1 - \cos(\varphi)\right)\right)\ddot{\varphi} = 0. \end{aligned}$$

Umgeformt ergibt dies

$$\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}\frac{\sin(\varphi)}{1 - \cos(\varphi)}\dot{\varphi}^2 - \frac{g}{2}\frac{\sin(\varphi)}{1 - \cos(\varphi)} = 0.$$