Aufgabe 1 *Zylinderkoordinaten, Kegelkoordinaten*

Eine Parametrisierung für Zylinderkoordinaten ist:

$$\Psi_{Zy} : \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

Und für Kegelkoordinaten:

$$\Psi_{Ke} : \begin{pmatrix} \varphi \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z\frac{R}{h}\cos\varphi \\ z\frac{R}{h}\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die zugehörigen Jacobi-Matrizen.

Lösung:

$$D\Psi_{Zy} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D\Psi_{Ke} = \begin{pmatrix} -z\frac{R}{h}\sin\varphi & \frac{R}{h}\cos\varphi \\ z\frac{R}{h}\cos\varphi & \frac{R}{h}\sin\varphi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Finden Sie geeignete Basen aus Einheitsvektoren (Dreibein). Geben Sie für die Kegelkoordinaten an, wie Sie vorgehen, um den 3. Basisvektor zu bestimmen - Sie müssen ihn nicht explizit ausrechnen.

Lösung:

$$\text{Zylinder: } e_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich musste nur für e_φ die Länge berechnet werden - durch scharfes Hinsehen erkennt man sofort, dass sie den Betrag r hat - wer es nicht sieht, berechnet $\sqrt{\langle \partial_\varphi \Psi, \partial_\varphi \Psi \rangle}$. Alle anderen Vektoren sind bereits normiert. Analog folgt für den Kegel

$$\text{Kegel: } e_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_z = \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{h^2}+1}} \begin{pmatrix} \frac{R}{h}\cos\varphi \\ \frac{R}{h}\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}$$

Den dritten Basivektor erhält man durch Bildung des Kreuzprodukts $e_\varphi \times e_z$. Auf Grund der Tatsache, dass die beiden Vektoren bereits normiert waren, ist das Ergebnis wieder normiert. Das explizite Ergebnis war nicht verlangt, kann aber schnell per Hand oder mit Mathematica etc. hergeleitet werden:

$$e_\perp = \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{h^2}+1}} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ -\frac{R}{h} \end{pmatrix}$$

Der dritte Basisvektor hat hier nur die Bedeutung einer Flächennormalen. Er kann nicht verwendet werden, um den gesammten $\mathbb{R}^3$ zu parametrisieren, da dann Punkte doppelt beschrieben würden (was verboten ist). Wir haben hier also nur eine 2-dimensionale (Kegel-)Fläche beschrieben

c) Zeigen Sie: Die Einheitsvektoren sind paarweise orthogonal.

Lösung:
Zylinder: Man erkennt sofort, dass alle Skalarprodukte $e_r \cdot e_\varphi$, $e_r \cdot e_z$, $e_z \cdot e_\varphi$ Null ergeben.
Kegel: Man erkennt sofort, dass das Skalarprodukt $e_z \cdot e_\varphi = 0$. Der 3. Basisvektor ist auf Grund seiner Konstruktion durch das Kreuzprodukt bereits per Definition senkrecht auf den beiden anderen.

d) Berechnen Sie eine Darstellung des Gradienten in Zylinderkoordinaten.
Hinweis: Bei paarweise orthogonalen Vektoren a_1, a_2 ... $a_n \in \mathbb{R}^n$ gilt für $A = (a_1 \cdots a_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $A^{T^{-1}} = A^{-1^T} = (\frac{a_1}{\|a_1\|^2} \cdots \frac{a_n}{\|a_n\|^2})$

Lösung:
Mit dem Hinweis erhält man leicht aus der Jacobi-Matrix die Transformationsmatrix:

$$D\Psi_{Zy} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad D\Psi_{Zy}^{T^{-1}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \frac{-\sin\varphi}{r} & 0 \\ \sin\varphi & \frac{\cos\varphi}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Analog zum Beispiel in der Vorlesung ist nun:

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} f = D\Psi_{Zy}^{T^{-1}} \begin{pmatrix} \partial_r \\ \partial_\varphi \\ \partial_z \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \frac{-\sin\varphi}{r} & 0 \\ \sin\varphi & \frac{\cos\varphi}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_r \\ \partial_\varphi \\ \partial_z \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \partial_r g + \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \partial_\varphi g + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \partial_z g$$
$$\Rightarrow \nabla f = (e_r\partial_r + \frac{1}{r} e_\varphi \partial_\varphi + e_z \partial_z) g$$

Aufgabe 2 *Laplace-Operator in Polarkoordinaten*

Laut Vorlesung lautet der Gradient in Polarkoordinaten $\nabla f = (e_r\partial_r + \frac{1}{r}e_\varphi\partial_\varphi)g$ und die Divergenz in Polarkoordinaten $\nabla \cdot F = \frac{1}{r}(\partial_r r F_r) + \frac{1}{r}\partial\varphi F_\varphi$. Dabei ist $g = f \circ \Psi$.
Zeigen Sie, dass der 2-dimensionale Laplace-Operator in Polarkoordinaten die Form $\Delta f = (\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2)g$ annimmt, indem Sie

a) zunächst zeigen, dass $\partial_r e_r = 0$, $\partial_\varphi e_r = e_\varphi$, $\partial_r e_\varphi = 0$, $\partial_\varphi e_\varphi = -e_r$ und dann die Beziehung $\Delta f = \langle \nabla, \nabla \rangle f$ verwenden.

Lösung:

$$\partial_r e_r = \partial_r \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = 0$$
$$\partial_\varphi e_r = \partial_\varphi \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} = e_\varphi$$
$$\partial_r e_\varphi = \partial_r \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} = 0$$
$$\partial_\varphi e_\varphi = \partial_\varphi \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix} = -e_r$$

Dann wenden wir das Skalarprodukt an:

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \langle e_r\partial_r + \frac{1}{r}e_\varphi\partial_\varphi, e_r\partial_r + \frac{1}{r}e_\varphi\partial_\varphi\rangle g \\
&= \left(\langle e_r\partial_r, e_r\partial_r\rangle + \langle e_r\partial_r, \frac{1}{r}e_\varphi\partial_\varphi\rangle + \langle\frac{1}{r}e_\varphi\partial_\varphi, e_r\partial_r\rangle + \langle\frac{1}{r}e_\varphi\partial_\varphi, \frac{1}{r}e_\varphi\partial_\varphi\rangle\right) g \\
&= \left((\langle e_r, (\partial_r e_r)\partial_r\rangle + \langle e_r, e_r\partial_r^2\rangle) + (\langle e_r, (\partial_r\frac{1}{r})e_\varphi\partial_\varphi\rangle + \langle e_r, \frac{1}{r}(\partial_r e_\varphi)\partial_\varphi\rangle + \langle e_r, \frac{1}{r}e_\varphi\partial_r\partial_\varphi\rangle)\right) g \\
&+ \left((\langle\frac{1}{r}e_\varphi, (\partial_\varphi e_r)\partial_r\rangle + \langle\frac{1}{r}e_\varphi, e_r\partial_\varphi\partial_r\rangle) + (\langle\frac{1}{r}e_\varphi, \frac{1}{r}(\partial_\varphi e_\varphi)\partial_\varphi\rangle + \langle\frac{1}{r}e_\varphi, \frac{1}{r}e_\varphi\partial_\varphi^2\rangle)\right) g \\
&= \left((\langle e_r, 0\rangle\partial_r + \langle e_r, e_r\rangle\partial_r^2) + (\langle e_r, e_\varphi\rangle\frac{-1}{r^2}\partial_\varphi + \langle e_r, 0\rangle\frac{1}{r}\partial_\varphi + \langle e_r, e_\varphi\rangle\frac{1}{r}\partial_r\partial_\varphi)\right) g \\
&+ \left((\langle e_\varphi, e_\varphi\rangle\frac{1}{r}\partial_r + \langle e_\varphi, e_r\rangle\frac{1}{r}\partial_\varphi\partial_r) + (\langle e_\varphi, -e_r\rangle\frac{1}{r^2}\partial_\varphi + \langle e_\varphi, e_\varphi\rangle\frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2)\right) g \\
&= \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2\right) g
\end{aligned}$$

b) direkt die Beziehung $\Delta f = \nabla \cdot \nabla f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$ verwenden.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \operatorname{div}((\overbrace{e_r\partial_r}^{F_r} + \overbrace{\frac{1}{r}e_\varphi\partial_\varphi}^{F_\varphi})g) = \left(\frac{1}{r}(\partial_r r(\partial_r)) + \frac{1}{r}\partial\varphi(\frac{1}{r}\partial_\varphi)\right) g \\
&= \left(\frac{1}{r}\partial_r + \partial_r^2 + \frac{1}{r^2}\partial\varphi^2\right) g
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 *Massenpunkt auf Bahn*

Ein Massenpunkt bewege sich nach dem Weg-Zeit-Gesetz $\vec{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Bestimmen sie die Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}}$ und die Beschleunigung $\ddot{\vec{x}}$ in Polarkoordinatendarstellung.

Lösung:
$\vec{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = r(t)\begin{pmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \end{pmatrix} = re_r$
Somit ist $\dot{e_r} = \dot{\varphi}e_\varphi$ und $\dot{e_\varphi} = -\dot{\varphi}e_r$

Also: $\dot{\vec{x}} = \dot{r}e_r + r\dot{e_r} = \dot{r}e_r + r\dot{\varphi}e_\varphi$

Nochmals differenzieren:

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{x}} &= \ddot{r}e_r + \dot{r}\dot{e_r} + \dot{r}\dot{\varphi}e_\varphi + r\ddot{\varphi}e_\varphi + r\dot{\varphi}\dot{e_\varphi} \\
&= \ddot{r}e_r + \dot{r}\dot{\varphi}e_\varphi + \dot{r}\dot{\varphi}e_\varphi + r\ddot{\varphi}e_\varphi - r\dot{\varphi}^2 e_r \\
&= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)e_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})e_\varphi
\end{aligned}$$

Anmerkung: In Polardarstellung nennt man die Einträge Radial- und Transversalkomponenten der Geschwindigkeit bzw. der Beschleunigung.

Aufgabe 4 *Bogenlänge in Kugelkoordinaten*

Berechnen Sie die Bogenlänge einer Kurve in Kugelkoordinaten. Eine Parametrisierung für die Kurve ist:

$$\begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cdot\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\cdot\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cdot\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Tipp: Verwenden Sie die „zu Fuß“-Methode, da die Matrizen recht unhandlich werden. Beachten Sie, dass alle Parameter r, φ und ϑ von t abhängen.

Lösung:
Wir berechnen zunächst die Ableitungen der Koordinaten:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \dot{r}\sin\vartheta\cos\varphi + r\dot{\vartheta}\cos\vartheta\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\varphi \\
\dot{y} &= \dot{r}\sin\vartheta\sin\varphi + r\dot{\vartheta}\cos\vartheta\sin\varphi + r\dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\varphi \\
\dot{z} &= \dot{r}\cos\vartheta - r\dot{\vartheta}\sin\vartheta
\end{aligned}$$

Danach die Quadrate:

$$\begin{aligned}
\dot{x}^2 &= \dot{r}^2\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + r^2\dot{\vartheta}^2\cos^2\vartheta\cos^2\varphi + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi + 2r\dot{r}\dot{\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta\cos^2\varphi \\
&\quad - 2r^2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos\vartheta\sin\vartheta\cos\varphi\sin\varphi - 2r\dot{r}\dot{\varphi}\sin^2\vartheta\cos\varphi\sin\varphi \\
\dot{y}^2 &= \dot{r}^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi + r^2\dot{\vartheta}\cos^2\vartheta\sin^2\varphi + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + 2r\dot{r}\dot{\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta\sin^2\varphi \\
&\quad + 2r^2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos\vartheta\sin\vartheta\cos\varphi\sin\varphi + 2r\dot{r}\dot{\varphi}\sin^2\vartheta\cos\varphi\sin\varphi \\
\dot{z}^2 &= \dot{r}^2\cos^2\vartheta + r^2\dot{\vartheta}^2\sin^2\vartheta - 2r\dot{r}\dot{\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta
\end{aligned}$$

Nun addiert man. Man sieht, dass sich die Terme in den jeweils 2. Zeilen von $\dot{x}^2$ und $\dot{y}^2$ gleich aufheben. Beim Rest klammert man bei zwei entsprechenden Summanden (stehen an gleicher Stelle in der Summe) gleiche Koeffizienten aus und verwendet die Identität $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$. Man erhält:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{r}^2\sin^2\vartheta + r^2\dot{\vartheta}^2\cos^2\vartheta + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta + 2r\dot{r}\dot{\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta + 0 + 0 + \dot{r}^2\cos^2\vartheta + r^2\dot{\vartheta}^2\sin^2\vartheta - 2r\dot{r}\dot{\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta$$

Wir verwenden wieder die Identität $\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta = 1$ und erhalten schließlich:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta + r^2\dot{\vartheta}^2$$

Somit:

$$L = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|\,dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}dt = \int_a^b \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta + r^2\dot{\vartheta}^2}dt$$

Aufgabe 5 *Implizite Funktion und 2. Ableitung*

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Durch $f(x,y) = 0$ mit $f(x_0,y_0) = 0$ und $f_y(x_0,y_0) \neq 0$ ist in einer Umgebung von x_0 implizit eine Funktion $y = h(x)$ mit $y_0 = h(x_0)$ und $f(x,h(x)) = 0$ gegeben.

a) Zeigen Sie durch Differenzieren von f, dass gilt:

$$y'(x_0) = -\frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}$$

Lösung:
Wir wissen, dass $f(x,y(x)) = 0$ ist. Wir leiten nach x mit Kettenregel ab und stellen um:

$$\frac{d}{dx}f = f_x + f_y y' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y' = -\frac{f_x}{f_y}$$

Dabei steht ein Strich für eine partielle Ableitung nach x. Also ist mit $y' = \partial_x y(x) = h'(x)$ gemeint. Setzen wir nun die Stelle x_0 ein, so steht die Behauptung sofort da: $y'(x_0) = -\frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}$

b) Zeigen Sie durch nochmaliges Differenzieren, dass gilt:

$$y''(x_0) = -\left.\frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_xf_yf_{xy} + f_{yy}f_x^2}{f_y^3}\right|_{(x_0,y_0)}$$

Lösung:
Aus der vorigen Teilaufgabe wissen wir, dass $\partial_x f = f_x + f_y y' = 0$ gilt. Wir differenzieren nochmals mit Kettenregel:

$$\frac{d}{dx}(f_x + f_y y') = \underbrace{(f_{xx} + f_{xy}y')}_{\partial_x f_x} + \underbrace{(f_{yx} + f_{yy}y')\cdot y'}_{(\partial_x f_y)\cdot y'} + \underbrace{f_y y''}_{f_y\partial_x y'} = 0$$

Setzen wir nun $y' = -\frac{f_x}{f_y}$ ein, wenden den Satz von Schwarz über die Vertauschung der Ableitungen für f_{yx} an, stellen um nach y'' und bringen alles auf einen Nenner:

$$y'' = -\frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_xf_yf_{xy} + f_{yy}f_x^2}{f_y^3}$$

Wie oben betrachtet man wieder die Stelle x_0 und die Behauptung folgt sogleich.

Aufgabe 6 *Anwendung der Formeln für* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = y + xe^y$, und $P = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion in einer Umgebung des Punktes P nach y auflösbar ist mit einer Auflösungsfunktion $y = y(x)$.

   Lösung:
   Es ist $f_y = 1 + xe^y$ und somit $f_y(0, 0) = 1 \neq 0$. Somit ist f nach y auflösbar.

b) Berechnen Sie $y'(0)$ und $y''(0)$.

   Lösung:
   Wir berechnen zunächst alle benötigten partiellen Ableitungen

$$\begin{array}{llll} f_x(x,y) & = e^y & \Rightarrow f_x(0,0) & = 1 \\ f_y(x,y) & = 1 + xe^y & \Rightarrow f_y(0,0) & = 1 \\ f_{xx}(x,y) & = 0 & \Rightarrow f_{xx}(0,0) & = 0 \\ f_{xy}(x,y) & = e^y & \Rightarrow f_{xy}(0,0) & = 1 \\ f_{yy}(x,y) & = xe^y & \Rightarrow f_{yy}(0,0) & = 0 \end{array}$$

   Wir verwenden die Formeln aus der vorigen Aufgabe:

$$y'(0) = -\frac{f_x(0,0)}{f_y(0,0)} = -\frac{1}{1} = -1$$

$$y''(0) = -\left.\frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_xf_yf_{xy} + f_{yy}f_x^2}{f_y^3}\right|_{(0,0)} = -\frac{0 - 2 + 0}{1} = 2$$

Aufgabe 7 *Anwendung des Satzes für* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = z^3 - xz - y = 0$. Durch f sei $z = z(x, y)$ implizit gegeben. Man berechne z_{xy}.

Lösung:
Wir berechnen zunächst:

$$z_x = -\frac{f_x}{f_z} = \frac{z}{3z^2 - x}$$
$$z_y = -\frac{f_y}{f_z} = \frac{1}{3z^2 - x}$$

Wir leiten z_x mit Hilfe der Kettenregel nach y ab:

$$\begin{aligned} z_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{z}{3z^2 - x} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{3z^2 - x}\underbrace{\frac{\partial z}{\partial y}}_{=z_y} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{z}{3z^2 - x}\underbrace{\frac{\partial x}{\partial y}}_{=0,\text{ da unabh.}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\frac{z}{3z^2 - x}}_{=0}\frac{\partial y}{\partial y} \\ &= \frac{-3z^2 - x}{(3z^2 - x)^2} \cdot \frac{1}{3z^2 - x} = \frac{-3z^2 - x}{(3z^2 - x)^3} \end{aligned}$$

Aufgabe 8 *Anwendung des Satzes für* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

Man zeige, dass das System

$$\begin{aligned} e^{xz} - x^2 + y^2 - 1 &= 0 \\ xy^3 + x^2 z + yz^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

in einer Umgebung von $P = (1,1,0)^T$ nach $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ auflösbar ist durch $y = h_1(x)$ und $z = h_2(x)$. Man berechne ferner den Tangentenvektor $\begin{pmatrix} h_1'(1) \\ h_2'(1) \end{pmatrix}$.

Lösung:

$$\mathbb{J}_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} ze^{xz} - 2x & 2y & xe^{xz} \\ y^3 + 2xz & 3xy^2 + z^2 & x^2 + 2yz \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{J}_f(1,1,0) = \left(\begin{array}{c|cc} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

Wegen $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ gibt es also eine lokale Auflösungsfunktion der Gestalt $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \end{pmatrix}$.
Wir erinnern uns an die lineare Algebra:

$$A^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{A}^{-1} = \underbrace{\frac{1}{ad - bc}}_{\frac{1}{detA}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Somit ist:

$$\begin{pmatrix} h_1'(1) \\ h_2'(1) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$