Aufgabe 1 *Zylinderkoordinaten, Kegelkoordinaten*

Eine Parametrisierung für Zylinderkoordinaten ist:

$$\Psi_{Zy}: \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

Und für Kegelkoordinaten:

$$\Psi_{Ke}: \begin{pmatrix} \varphi \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z\frac{R}{h}\cos\varphi \\ z\frac{R}{h}\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die zugehörigen Jacobi-Matrizen.

b) Finden Sie geeignete Basen aus Einheitsvektoren (Dreibein). Geben Sie für die Kegelkoordinaten an, wie Sie vorgehen, um den 3. Basisvektor zu bestimmen - Sie müssen ihn nicht explizit ausrechnen.

c) Zeigen Sie: Die Einheitsvektoren sind paarweise orthogonal.

d) Berechnen Sie die Darstellung des Gradienten in Zylinderkoordinaten.
Hinweis: Bei paarweise orthogonalen Vektoren a_1, a_2 ... $a_n \in \mathbb{R}^n$ gilt für $A = (a_1 \cdots a_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$: ${A^T}^{-1} = {A^{-1}}^T = (\frac{a_1}{\|a_1\|^2} \cdots \frac{a_n}{\|a_n\|^2})$

Aufgabe 2 *Laplace-Operator in Polarkoordinaten*

Laut Vorlesung lautet der Gradient in Polarkoordinaten $\nabla f = (e_r\partial_r + \frac{1}{r}e_\varphi\partial_\varphi)g$ und die Divergenz in Polarkoordinaten $\nabla \cdot F = \frac{1}{r}(\partial_r rF_r) + \frac{1}{r}\partial\varphi F_\varphi$. Dabei ist $g = f \circ \Psi$.
Zeigen Sie, dass der 2-dimensionale Laplace-Operator in Polarkoordinaten die Form $\Delta f = (\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2)g$ annimmt, indem Sie

a) zunächst zeigen, dass $\partial_r e_r = 0$, $\partial_\varphi e_r = e_\varphi$, $\partial_r e_\varphi = 0$, $\partial_\varphi e_\varphi = -e_r$ und dann die Beziehung $\Delta f = \langle\nabla, \nabla\rangle f$ verwenden.

b) direkt die Beziehung $\Delta f = \nabla \cdot \nabla f = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\ f)$ verwenden.

Aufgabe 3 *Massenpunkt auf Bahn*

Ein Massenpunkt bewege sich nach dem Weg-Zeit-Gesetz $\vec{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Bestimmen sie die Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}}$ und die Beschleunigung $\ddot{\vec{x}}$ in Polarkoordinatendarstellung.

Aufgabe 4 *Bogenlänge in Kugelkoordinaten*

Berechnen Sie die Bogenlänge einer Kurve in Kugelkoordinaten. Eine Parametrisierung für die Kurve ist:

$$\begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \sin\vartheta\cos\varphi \\ r \cdot \sin\vartheta\sin\varphi \\ r \cdot \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Tipp: Verwenden Sie die „zu Fuß“-Methode, da die Matrizen recht unhandlich werden. Beachten Sie, dass alle Parameter r, φ und ϑ von t abhängen.

Aufgabe 5 *Implizite Funktion und 2. Ableitung für* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Durch $f(x, y) = 0$ mit $f(x_0, y_0) = 0$ und $f_y(x_0, y_0) \neq 0$ ist in einer Umgebung von x_0 implizit eine Funktion $y = h(x)$ mit $y_0 = h(x_0)$ und $f(x, h(x)) = 0$ gegeben.

a) Zeigen Sie durch Differenzieren von f, dass gilt:

$$y'(x_0) = -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}$$

b) Zeigen Sie durch nochmaliges Differenzieren, dass gilt:

$$y''(x_0) = -\left.\frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_xf_yf_{xy} + f_{yy}f_x^2}{f_y^3}\right|_{(x_0,y_0)}$$

Aufgabe 6 *Anwendung der Formeln für* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = y + xe^y$, und $P = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion in einer Umgebung des Punktes P nach y auflösbar ist mit einer Auflösungsfunktion $y = y(x)$.

b) Berechnen Sie $y'(0)$ und $y''(0)$.

Aufgabe 7 *Anwendung des Satzes für* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = z^3 - xz - y = 0$. Durch f sei $z = z(x, y)$ implizit gegeben. Man berechne z_{xy}.

Aufgabe 8 *Anwendung des Satzes für* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

Man zeige, dass das System

$$\begin{aligned} e^{xz} - x^2 + y^2 - 1 &= 0 \\ xy^3 + x^2z + yz^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

in einer Umgebung von $P = (1, 1, 0)^T$ nach $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ auflösbar ist durch $y = h_1(x)$ und $z = h_2(x)$. Man berechne ferner den Tangentenvektor $\begin{pmatrix} h_1'(1) \\ h_2'(1) \end{pmatrix}$.