Andreas Wörfel

Zusatz zur Lösung Dienstag

Ferienkurs Analysis 2 für Physiker

SS 2011

Für die totale Differenzierbarkeit der Lösung gilt nach Vorlesung folgendes Kriterium:

$$\lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{\|\zeta(\xi)\|}{\|\xi\|} = 0$$

Dies lässt sich mit $f(x+\xi) = f(x) + A(x)(\xi) + \zeta(\xi)$ (ebenfalls aus der Vorlesung) umschreiben in:

$$\lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{\|\zeta(\xi)\|}{\|\xi\|} = \lim_{(x,y)^T\to(x_0,y_0)^T} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - Df(x_0,y_0)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}\right\|} = 0$$

In unserem Falle von 2 Dimensionen lässt sich das ganze nochmals etwas offensichtlicher ausdrücken:

$$\lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{\|\zeta(\xi)\|}{\|\xi\|} = \lim_{(x,y)^T\to(x_0,y_0)^T} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - (\partial_x f(x_0,y_0))(x-x_0) - (\partial_y f(x_0,y_0))(y-y_0)}{\left\|\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}\right\|} = 0$$

Wenden wir das ganze auf unseren Fall (Aufgabe 3c) für f (analog für g) an:

$$\lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{\|\zeta(\xi)\|}{\|\xi\|} = \lim_{(x,y)^T\to(0,0)^T} \frac{f(x,y) - f(0,0) - (\partial_x f(0,0))x - (\partial_y f(0,0))y}{\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|}$$

Sowohl für die Funktion f als auch für g ist nur der erste Term im Zähler verschieden von Null. Es bleibt nun für f (und analog für g) also übrig:

$$\lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{\|\zeta(\xi)\|}{\|\xi\|} = \lim_{(x,y)^T\to(0,0)^T} \frac{f(x,y)}{\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|}$$

Wir nehmen den Polarkoordinatenansatz, den wir bei 3a verwendet haben, und erhalten für die Funktion f:

$$\lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{\|\zeta(\xi)\|}{\|\xi\|} = \lim_{r\to 0} \frac{r \cdot \overbrace{h(\varphi)}^{<\infty}}{r} = \lim_{r\to 0} \overbrace{h(\varphi)}^{\neq 0 \text{ für allg. } \varphi} \neq 0$$

Analog erhalten wir für g:

$$\lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{\|\zeta(\xi)\|}{\|\xi\|} = \lim_{r\to 0} \frac{r^4 \sin(1/r^2)\cdot k(\varphi)}{r} = \lim_{r\to 0} r^3 \underbrace{\sin(1/r^2)}_{-1<\cdot<1} \overbrace{k(\varphi)}^{<\infty} = 0$$

Also ist f nicht total differenzierbar, wohl aber g.