Christian Neumann
Musterlösung Dienstag

Aufgabe 1 *Vektoranalysis*

a) Seinen $f, g \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}), F, G \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$Zeigen Sie, dass:

- $\nabla \cdot (\nabla f) = \Delta f$
- $\nabla(fg) = g(\nabla f) + f(\nabla g)$
- $\nabla \cdot (F \times G) = -F \cdot (\nabla \times G) + G \cdot (\nabla \times F)$
- $\nabla \times (\nabla \times F) = \nabla(\nabla \cdot F) - \Delta F$
- $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$
- $\nabla \cdot (fF) = F \cdot (\nabla f) + f(\nabla \cdot F)$

Hinweis: $\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$

Lösung:

- $\nabla \cdot (\nabla f) = \sum_j \partial_j (\nabla f)_j = \sum_j \partial_j^2 f = \Delta f$
- $(\nabla(fg))_i = \partial_i(fg) = g(\partial_i f) + f(\partial_i g) = g(\nabla f)_i + f(\nabla g)_i = (g(\nabla f) + f(\nabla g))_i$
- $\nabla \cdot (F \times G) = \sum_j \partial_j (F \times G)_j = \sum_{j,k,l} \partial_j \epsilon_{klj}(F_k G_l) = \sum_{j,k,l} \epsilon_{klj}(\partial_j F_k)G_l + F_k(\partial_j G_l) = \sum_{j,k,l} \epsilon_{jkl}(\partial_j F_k)G_l - \sum_{j,k,l} \epsilon_{kjl} F_k(\partial_j G_l) = -F \cdot (\nabla \times G) + G \cdot (\nabla \times F)$
- $(\nabla \times (\nabla \times F))_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk}\partial_j(\nabla \times F)_k = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk}\partial_j \sum_{lm} \epsilon_{klm}\partial_l F_m \overset{\text{Hw}}{=} \sum_{jlm} (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\partial_j\partial_l F_m = \sum_j \partial_j\partial_i F_j - \sum_j \partial_j\partial_j F_i = (\nabla(\nabla \cdot F) - \Delta F)_i$
- $\nabla \cdot (\nabla \times F) = \sum_i \partial_i (\nabla \times F)_i = \sum_{i,j,k} \partial_i \epsilon_{ijk}\partial_j F_k = -\sum_{i,j,k} \partial_j \epsilon_{jik}\partial_i F_k = -\nabla \cdot (\nabla \times F)$
- $\nabla \cdot (fF) = \sum_j \partial_j (fF_j) = \sum_j F_j(\partial_j f) + f\partial_j F_j = F \cdot (\nabla f) + f(\nabla \cdot F)$

b) Zeigen sie ausgehend von den 4 Maxwell-Gleichungen im Vakuum

- $\text{div}E = 0; \qquad \text{rot}E = -\partial_t B/c$
- $\text{div}B = 0; \qquad \text{rot}B = \partial_t E/c$

dass E, B die Wellengleichungen erfüllen:

$$\left(\Delta - 1/c^2\partial_t^2\right) E = 0; \qquad \left(\Delta - 1/c^2\partial_t^2\right) B = 0$$

Lösung: Die 4. Relation aus a) liefert

$$\Delta F = \nabla(\nabla \cdot F) - \nabla \times (\nabla \times F)$$

Auf die Maxwell-Gleichungen angewendet liefert dieses uns

$$\Delta E = \nabla(\underbrace{\nabla \cdot E}_{=0}) - \nabla \times (\nabla \times E) = -\text{rot}(-\partial_t B/c) = 1/c^2\partial_t^2 E$$

analog für B

c) Seien $f, g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Zeigen sie, dass die Funktion

$$E(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

die eindimensionale Wellengleichung erfüllt.
Lösung: Die Kettenregel liefert: $\partial_x E(x,t) = \partial_x f(x - ct) + \partial_x g(x + ct) = f'(x - ct) + g'(x + ct)$
$\partial_x^2 E(x,t) = f''(x - ct) + g''(x + ct)$
$\partial_t E(x,t) = \partial_x f(x - ct) + g(x + ct) = -c \cdot f'(x - ct) + c \cdot g'(x + ct)$
$\partial_t^2 E(x,t) = \partial_x(-c \cdot f'(x - ct)) + \partial_x(c \cdot g'(x + ct)) = c^2 \cdot f''(x - ct) + c^2 \cdot g''(x + ct)$
$\Rightarrow \partial_x^2 E(x,t) = 1/c^2\partial_t^2 E(x,t)$

Aufgabe 2 *Schrödingergleichung für einen Kasten*

Zeigen sie, dass die Wellenfunktion $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$

$$\Psi(x,y,z) = \sin(\pi n_x x)\sin(\pi n_y y)\sin(\pi n_z z), \qquad n_x, n_y, n_z \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$$

die Schrödingergleichung für den 3-dimensionalen Potentialkasten löst

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(x,y,z) = E\Psi(x,y,z)$$

Wie lauten die Energieniveaus E_{n_x,n_y,n_z} ?

Lösung:
Zweimaliges ableiten der Wellenfunktion nach x liefert :
$\partial_x\partial_x\Psi(x,y,z) = \partial_x^2 \sin(\pi n_x x)\sin(\pi n_y y)\sin(\pi n_z z) = \partial_x \pi n_x \cos(\pi n_x x)\sin(\pi n_y y)\sin(\pi n_z z) =$
$-n_x^2\pi^2 \sin(\pi n_x x)\sin(\pi n_y y)\sin(\pi n_z z) = -n_x^2\pi^2 \cdot \Psi(x,y,z)$
analog für y, z.
Damit erhalten wir
$-\frac{\hbar}{2m}\Delta\Psi(x,y,z) = -\frac{\hbar}{2m}(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)\Psi(x,y,z) = \frac{2\pi\hbar}{2m}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)\Psi(x,y,z)$
Für $E_{n_x,n_y,n_z} = \frac{\pi^2\hbar}{2m}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$
löst die gewählte Wellenfunktion also die Schrödingergleichung für den 3-dimensionalen Kasten.

Aufgabe 3 *Differenzierbarkeit*

Gegeben seien

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 y \frac{x^2-y^2}{x^4+y^4} & \text{wenn}(x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} (x^4+y^4)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{wenn}(x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Sind die Funktionen stetig auf ganz $\mathbb{R}^2$?

b) Berechnen sie die partiellen Ableitungen im Ursprung

c) Sind die Funktionen partiell und/oder total differenzierbar ?

Lösung:

a) beide Funktionen sind stetig. Außerhalb von $(0,0)$ da sie Zusammensetzung stetiger Funktionen sind. Im Ursprung kann man dies z.B durch wechseln zu Polarkoordinaten nachweisen
   - $\lim\limits_{r\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{r\to 0} \frac{r^5}{r^4}\cos^2(\varphi)\sin(\varphi)\frac{\cos^2(\varphi)-\sin^2(\varphi)}{(\cos^4(\varphi)+\sin^4(\varphi))} = 0$
   - $\lim\limits_{r\to 0} g(x,y) = \lim\limits_{r\to 0} r^4 \sin(1/r^2)(\cos^4(\varphi) + \sin^4(\varphi)) = 0$
     Da der Sinus durch 1 bzw -1 beschränkt ist.

b)
   - Da $f(x,0) = f(0,y) = 0 \Rightarrow \partial_x f(0,0) = \partial_y f(0,0) = 0$
   - $\partial_x g(x,0) = 4x^3\sin(1/x^2) - 2x\cos(1/x^2) \Rightarrow \partial_x g(0,0) = 0$ analog $\partial_y g(0,0) = 0$

   c) Damit die Funktion total differenzierbar im Ursprung ist, muss die Bedingung aus der Vorlesung erfüllt sein. (Df bezeichnet die Jacobi-Matrix)

   $$\lim_{h_1,h_2\to 0} \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - Df(h_1,h_2)(h_1,h_2)^T}{||h_1,h_2||} = 0$$

   Wählt man nun $2\cdot h_1 = h_2 = h$ und nutzt die Ergebnisse aus den vorherigen Aufgaben

   $$\lim_{h\to 0} \frac{f(2h,h) - f(0,0) - Df(2h,h)(2h,h)^T}{||(2h,h)||} = \lim \lim_{h\to 0} \frac{f(2h,h)}{(5h^2)^{1/2}} = \lim \lim_{h\to 0} \frac{12h^5}{(2^4+1)\sqrt{5}h^5} \neq 0$$

   Die Funktion ist also nicht total differenzierbar

- Für die Funktion g gilt:

$$\lim_{h_1,h_2\to 0}\frac{g(h_1,h_2)-g(0,0)-Dg(h_1,h_2)(h_1,h_2)^T}{||(h_1,h_2)||}$$

  Einsetzten vorheriger Ergebnisse und wechseln zu Polarkoordinaten liefert

$$\lim_{r\to 0}\frac{g(r\cos(\phi),r\sin(\phi))}{r}=\lim_{r\to 0}(\cos^4(\phi)+\sin^4(\phi))r^3\sin(1/r^2)=0$$

  g ist also total differenzierbar

Aufgabe 4 *Stetige Fortsetzung*

Gegeben sei

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin\left(4\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{wenn}(x,y,z)\neq 0\\ a & \text{sonst}\end{cases}$$

a) Finden sie ein a dass $f(x,y)$ stetig fortsetzt

b) Berechnen sie die Tangentialebene $T(x,y)$ im Punkt $P(\pi/4,0)$

Lösung

a) Parametrisiert man f in Polarkoordinaten und nutzt die l'Hospitalischen Regeln so erhält man

$$a=\lim_{r\to 0}\frac{\sin(4r)}{r}=\frac{4\cos(4r)}{1}=4$$

b) Zunächst die partielle Ableitung in $x-$ Richtung:

$$\partial_x f(x,y)=x\frac{\cos(4\sqrt{x^2+y^2})4\sqrt{x^2+y^2}-\sin(4\sqrt{x^2+y^2})}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\partial_y f(x,y)=y\frac{\cos(4\sqrt{x^2+y^2})4\sqrt{x^2+y^2}-\sin(4\sqrt{x^2+y^2})}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Die Tangentialebene ist gegebenen durch die Taylorentwicklung bis zur 1. Ordnung:

$$T(x,y)=f(\pi/4,0)+\nabla f(\pi/4,0)\cdot(x-\pi/4,y)^T=2^4/\pi x-2^4/\pi$$

Aufgabe 5 *Extrema*

Bestimmen sie Ort und Art der Extrema für die Funktionen

a) $f(x,y)=x^3-12xy+8y^3$

b) $g(x,y)=3xy^2+4x^3-3y^2-12x^2+1$

c) $h(x,y)=\sin(x)\cos(y)$

Lösung

a) $f(x,y)=x^3-12xy+8y^3$ Kandidaten für kritische Punkte sind durch

$$\nabla f=0$$

gegeben. In diesem Fall
$3x^2-12y=0 \quad\wedge\quad 24y^2-12x=0$
Wir erhalten die 2 reellen Lösungen
$(x_1=0,y_1=0) \quad\wedge\quad (x_2=2,y_2=1)$
Die Hessematrix ist gegeben durch

$$H(f)(x,y)=\begin{pmatrix}6x & -12\\ -12 & 48y\end{pmatrix}$$

Für die Determinante und Spur erhält man
$\det H(f)(x,y) = 288xy - 122; \qquad \mathrm{Spur} H(f)(x,y) = 6x + 48y$
Ausgewertet am ersten Punkt erhält man
$\det H(f)(0,0) = -122, \mathrm{Spur} H(f)(0,0) = 0$ Es ist also keine Aussage möglich. Betrachtet man nun
$f(0,y) = 8y^3, f(x,0) = x^3$
so sieht man, dass $f(0,0)$ ein Sattelpunkt ist.
Am 2. Punkt erhält man
$\det H(f)(2,1) > 0, \mathrm{Spur} H(f)(2,1) > 0$
es handelt sich also um ein Minimum.

b) $g(x,y) = 3xy^2 + 4x^3 - 3y^2 - 12x^2 + 1$ Man erhält 4 kritische Punkte

- $(0,0)$ lokales Maximum
- $(2,0)$ lokales Minimum
- $(1,2)$ Sattelpunkt in $x-$ Richtung, konstant in $y-$ Richtung
- $(1,-2)$ wie $(1,2)$

c) $h(x,y) = \sin(x)\sin(y)$ Die Funktion hat unendlich viele Extrema. Da $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$ reicht die Bestimmung der kritischen Punkte im Intervall $[0,2\pi] \times [0,2\pi]$ Es lassen sich insgesamt 8 Punkte finden:

- $(0,0)$ Sattelpunkt
- $(\pi,0)$Sattelpunkt
- $(0,\pi)$Sattelpunkt
- (π,π)Sattelpunkt
- $(\pi/2,\pi/2)$ lokales Maximum
- $(3/2\pi, 3/2\pi)$lokales Maximum
- $(\pi/2, 3/2\pi)$lokales Minimum
- $(3/2\pi, \pi/2)$lokales Minimum

Aufgabe 6 *Taylor - Entwicklung*

Entwickeln sie folgende Funktionen:

a) $\sqrt{1 + a \cdot x}$ in $x = 0$

b) $\sin(x+y)$ in $(\pi, 0)$

c) $f(0) = 5; \partial_x f(0) = 1/2, \partial_z f(0) = 2; \partial_x\partial_y f(0) = 3; \partial_x\partial_z f(0) = \pi; \partial_z\partial_z f(0) = \pi/3$; nicht aufgezählte Ableitungen null in $(0,0,0)$

d) $\frac{4+x^4-3y^2}{\sqrt{4+xy}}$ in $(0,0)$

Lösung

a) $\sqrt{1 + a \cdot x}$ in $x = 0$
$\sqrt{1 + a \cdot x} = 1 + \frac{1}{2}ax - \frac{1}{8}a^2x^2 + \frac{1}{16}a^3x^3 + O(x^4)$

b) $\sin(x+y)$ in $(\pi, 0)$
Definiert man sich die Substitution $u(x,y) = x + y$ und leitet diese partiell ab, so erhält man:
$\partial_x u(x,y) = 1; \partial_y u(x,y) = 1 \Rightarrow \partial_x \sin(x+y) = \partial_x \sin(u(x+y)) = \cos(u)$
Auf diese Weise lassen sich alle benötigten Ableitungen leicht beschaffen:

- $\partial_x \sin(u(x,y)) = \partial_y \sin(u(x,y)) = \cos(u(x,y))$
- $\partial_x^2 \sin(u(x,y)) = \partial_y^2 \sin(u(x,y)) = \partial_x\partial_y \sin(u(x,y)) = -\sin(u(x,y))$
- $\partial_x^3 \sin(u(x,y)) = \partial_y^3 \sin(u(x,y)) = \partial_x^2\partial_y \sin(u(x,y)) = ... = -\cos(u(x,y))$
- $\partial_x^4 \sin(u(x,y)) = \partial_y^4 \sin(u(x,y)) = \partial_x^3\partial_y \sin(u(x,y)) = ... = \sin(u(x,y))$

Da $\sin(\pi) = 0$ fällt die Entwicklung 0., 2. und 4. Ordnung weg. Eingesetzt in die Formel aus der Vorlesung erhält man nun
$\sin(x+y) \simeq \sum\limits_{|\alpha|\leq 4} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(x_0)\xi^\alpha =$
$\frac{1}{1!}\partial_x \sin(x+y)|_{x=\pi,y=0}\,(x-\pi) + \frac{1}{1!}\partial_y \sin(x+y)|_{x=\pi,y=0}\,(y)+$
$\frac{1}{3!}\partial_x^3 \sin(x+y)|_{x=\pi,y=0}\,(x-\pi)^3 \frac{1}{3!}\partial_y^3 \sin(x+y)|_{x=\pi,y=0}\,(y)^3+$
$\frac{1}{2!1!}\partial_x^2\partial_y \sin(x+y)|_{x=\pi,y=0}\,(x-\pi)^2 y + \frac{1}{2!1!}\partial_x\partial_y^2 \sin(x+y)|_{x=\pi,y=0}\,(x-\pi)y^2 =$
$-(x+y) + \pi + 1/6(x-\pi)^3 + 1/6y^3 + 1/2(x-\pi)^2 y + 1/2(x-\pi)y^2$

c) $f(0) = 5; \partial_x f(0) = 1/2, \partial_z f(0) = 2; \partial_x\partial_y f(0) = 3; \partial_x\partial_z f(0) = \pi; \partial_z\partial_z f(0) = \pi/3$; nicht aufgezählte Ableitungen null in $(0,0,0)$
Einsetzen der gegebenen Ableitungen in den Gradienten bzw die Hessematrix liefern

$$f(x,y) \simeq 5 + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 1/2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & \pi \\ 3 & 0 & 0 \\ \pi & 0 & \pi/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5 + 1/2x + 2z + 3xy + \pi xz + \pi/6z^2$$

d) $g(x,y) = \frac{4+x^4-3y^2}{\sqrt{4+xy}}$ in $(0,0)$ Die Ableitungen lauten:

- $\partial_x g(x,y) = \frac{4x^3}{\sqrt{4+xy}} - \frac{1}{2}\frac{(4+x^4-3y^2)y}{(4+xy)^{3/2}} \qquad \Rightarrow \partial_x g(0,0) = 0$
- $\partial_y g(x,y) = \frac{-6y}{\sqrt{4+xy}} - \frac{1}{2}\frac{(4+x^4-3y^2)x}{(4+xy)^{3/2}} \qquad \Rightarrow \partial_y g(0,0) = 0$
- $\partial_x^2 g(x,y) = \frac{12x^2}{\sqrt{4+xy}} - \frac{4x^3y}{(4+xy)^{3/2}} + \frac{3}{4}\frac{(4+x^4-3y^2)y^2}{(4+xy)^{5/2}} \qquad \Rightarrow \partial_x^2 g(0,0) = 0$
- $\partial_y^2 g(x,y) = \frac{-6}{\sqrt{4+xy}} - \frac{6xy}{(4+xy)^{3/2}} + \frac{3}{4}\frac{(4+x^4-3y^2)x^2}{(4+xy)^{5/2}} \qquad \Rightarrow \partial_y^2 g(0,0) = 3$
- $\partial_x\partial_y g(x,y) = -\frac{1}{4}\frac{-72y^2-9xy^3+40x^4+7x^5y-4xy+32}{(4+xy)^{5/2}} \qquad \Rightarrow \partial_x\partial_y g(0,0) = \partial_y\partial_x g(0,0) = -\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow g(x,y) \simeq -\frac{1}{4}xy - \frac{3}{2}y^2 + 2$$