Christian Neumann Ferienkurs Analysis 2
Aufgaben Dienstag SS 2011

Aufgabe 1 *Vektoranalysis*

a) Seien $f, g \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}), F, G \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie, dass:

- $\nabla \cdot (\nabla f) = \Delta f$
- $\nabla(fg) = g(\nabla f) + f(\nabla g)$
- $\nabla \cdot (F \times G) = -F \cdot (\nabla \times G) + G \cdot (\nabla \times F)$
- $\nabla \times (\nabla \times F) = \nabla(\nabla \cdot F) - \Delta F$
- $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$
- $\nabla \cdot (fF) = F \cdot (\nabla f) + f(\nabla \cdot F)$

Hinweis: $\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$

b) Zeigen sie ausgehend von den 4 Maxwell-Gleichungen

- $\mathrm{div} E = 0; \qquad \mathrm{rot} E = -\partial_t B/c$
- $\mathrm{div} B = 0; \qquad \mathrm{rot} B = \partial_t E/c$

dass E, B die Wellengleichungen erfüllen:

$$\left(\Delta - 1/c^2 \partial_t^2\right) E = 0; \qquad \left(\Delta - 1/c^2 \partial_t^2\right) B = 0$$

c) Seien $f, g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Zeigen sie, dass die Funktion

$$E(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

die ein-eindimensionale Wellengleichung erfüllt

Aufgabe 2 *Schrödingergleichung für einen Kasten*

Zeigen sie, dass die Wellenfunktion $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$

$$\Psi(x,y,z) = \sin(\pi n_x x)\sin(\pi n_y y)\sin(\pi n_z z), \qquad n_x, n_y, n_z \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$$

die Schrödingergleichung für den dreidimensionalen Potentialkasten löst

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(x,y,z) = E\Psi(x,y,z)$$

Wie lauten die Energieniveaus E_{n_x,n_y,n_z} ?

Aufgabe 3 *Differenzierbarkeit*

Gegeben seien

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 y \frac{x^2 - y^2}{x^4 + y^4} & \text{wenn}(x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} (x^4 + y^4)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{wenn}(x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sind die Funktionen

a) Sind die Funktionen stetig auf ganz $\mathbb{R}^2$?

b) Berechnen sie die partiellen Ableitungen im Ursprung

c) Sind die Funktionen partiell und/oder total differenzierbar ?

Aufgabe 4 *Stetige Fortsetzung*

Gegeben sei

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin\left(4\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{wenn}(x,y,z) \neq 0 \\ a & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Finden sie ein a dass $f(x,y)$ stetig fortsetzt

b) Berechnen sie die Tangentialebene $T(x,y)$ im Punkt $P(\pi/4,0)$

Aufgabe 5 *Extrema*

Bestimmen sie Ort und Art der Extrema für die Funktionen

a) $f(x,y) = x^3 - 12xy + 8y^3$

b) $g(x,y) = 3xy^2 + 4x^3 - 3y^2 - 12x^2 + 1$

c) $h(x,y) = \sin(x)\sin(y)$

Aufgabe 6 *Taylor - Entwicklung*

Entwickeln sie folgende Funktionen:

a) $\sqrt{1 + a \cdot x}$ in $x = 0$ bis zur 3. Ordnung

b) $\sin(x+y)$ in $(\pi,0)$ bis zur 4. Ordnund

c) $f(0) = 5; \partial_x f(0) = 1/2, \partial_z f(0) = 2; \partial_x \partial_y f(0) = 3; \partial_x \partial_z f(0) = \pi; \partial_z \partial_z f(0) = \pi/3;$ nicht aufgezählte Ableitungen null in $(0,0,0)$ bis zur 2. Ordnung

d) $\frac{4+x^4-3y^2}{\sqrt{4+xy}}$ in $(0,0)$ bis zur 2. Ordnung